Augusztusi feladatsor

Beadási határidő: augusztus 28.

1, Néhány lány és fiú közös tánciskolába jelentkezik salsázni. Tudjuk, hogy mindenki legfeljebb k embert ismer a másik neműek közül, és hogy az első tánc alkalmával mindenki olyannal táncolna szívesen, akit ismer. Bizonyítsd be, hogy megszervezhető úgy az első tánc, hogy akik pont k táncpartnert ismernek, azok az ismerőseik egyikével táncoljanak.

2, Az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja E. Az AEB és CED háromszögek súlypontja P és S. Az AED és BEC háromszögek magasságpontja M és N. Igazoljuk, hogy PS merőleges MN-re! (Bősze Zsuzsitól)

3, Egy kisebb kör belülről érint egy nagyobbat a T pontban. A nagyobb kör egy AB húrja a P pontban érinti a kisebb kört. Bizonyítsuk be, hogy a TP egyenes felezi az ATB szöget.

4, Egy szuper-szimfonikus zenekarban, amelynek tagszáma k, bármely két emberre mutat a karmester, létezik pontosan egyvalaki még a zenekarból, akivel játszottak korábban trióban. Bizonyítsuk be, hogy a 300-nál kisebb pozitív számok közül legfeljebb 100 van, amelyre létezhet a feltételnek megfelelő zenekar.
Keressünk végtelen sok k-t, amire a feltétel fennáll.

5, Jelölje $a(n)$ és $b(n)$ az n pozitív egész szám különböző pozitív egészekre való felbontásai számát, ahol a felbontásokban rendre páros, illetve páratlan sok összeadandó tag van. Igazoljuk, hogy $|a(n) - b(n)| \leq 1$! Milyen n esetén teljesülhet egyenlőség?

6, Az x, y, z pozitív valós számokra $x+y+z = xyz$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leq \frac{3}{4}$

7, Legyen p egy egész együtthatós polinom. Mutassuk meg, hogy ha egy x egész számra $p(p(\dots p(x)\dots)) = x$, akkor $p(p(x)) = x$