

2014 októberi (kombinatorika) feladatsor

Beadási határidő: október 31.

Az EGMO-n gyakran bukkannak fel kombinatorika feladatok. Ezek sokszor nem túl nehezek, de a precíz leírásuk igencsak macerás lehet (lásd. pl. tavalyi EGMO 2. nap 2. feladatát). Ezen a feladatsoron könnyebb és nehezebb feladatok egyaránt felbukkannak. Bármelyiket is külditek be, törekedjete a tömör, de teljes bizonyításra!

Jó szórakozást! :)

1. Egy 9×9 -es táblázat celláiba valamilyen sorrendben beírjuk az $1, 2, \dots, 81$ számokat.
 - a, Bizonyítsuk be, hogy bármely elrendezés esetén található a táblázatban két olyan szomszédos cella, amelyekben szereplő számok különbsége legalább 6 (két cella szomszédos, ha van közös oldaluk).
 - b, Mekkora a legnagyobb különbség minimuma? Adjunk minél jobb korlátot! Ha tudjuk, bizonyítsuk is be, hogy ennél jobb nem lehet!
2. Egy 60 egység hosszúságú körvonalat 30 ponttal 30 ívdarabra osztottunk fel úgy, hogy az ívdarabok közül 10-nek a hossza 1, 10-nek a hossza 2 és 10-nek a hossza 3. Bizonyítsuk be, hogy a felvett pontok között van legalább két pont, melyek körvonalon mért távolsága 30.
3. Egy hagyományos koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek egyik oldala az x , egy másik oldala az y tengelyre illeszkedjék. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Bizonyítsuk be, hogy
 - a, van a téglalapok között két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat,
 - b, van 1000 db melyek tartalmazásra láncot alkotnak,
 - c, igaz-e, hogy végtelen sok is van, melyek ilyen láncot alkotnak?
4. Egy tisztáson 14 fa áll körben, mindegyiken egy-egy mókus ül. Megengedjük, hogy egyszerre két mókus ugorjon valamelyik szomszédos fára. Ugrálhatnak-e a mókusok úgy, hogy mindegyik ugyanarra a fára kerüljön?
5. Három urnánk van, mindegyikben néhány golyó. Ha az A urnában legalább annyi golyó van mint a B urnában, akkor a B urna tartalmát megduplázzhatjuk az A urnából kivett golyókkal, és e lépést bármely két urna között elvégezhetjük. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések sorozatával a három urna valamelyikét kiüríthetjük.