2014 októberi (kombinatorika) feladatsor

MEGOLDÁSOK

Szép számmal küldtetek megoldásokat, csak így tovább! :) Néhány feladatnál linkeket, néhánynál pedig valamelyikőtök megoldását olvashatjátok (sajnos a kézzel írott verziókat nehéz idemásolni).

1. **Megoldás:(Baran Zsuzsanna)**

   Elég az 1,b részben belátni, hogy a legnagyobb különbség legalább 9. Tekintsük a táblázatnak egy tetszőleges kitöltését. Jelölje n a legkisebb olyan (pozitív egész) számot, amire teljesül, hogy az adott kitöltés esetén az $1, 2, ..., n$ számok közül szerepel minden sorban vagy minden oszlopban legalább egy. A táblázatba most csak az előbbi n db számot írjuk be. Nem fordulhat elő, hogy ilyenkor van teljesen kitöltött sor és teljesen kitöltött oszlop is, mert ha lenne, akkor bármelyik helyen is van n, már az $1, 2, ..., (n-1)$ számokból is jutna minden sorba vagy minden oszlopba. Ezek szerint teljesül, hogy minden oszlopban van szám, de nincs teli oszlop vagy minden sorban van szám, de nincs teli sor. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy az előbbi eset áll fenn. Ekkor minden oszlopban tudunk választani egy olyan cellát, ami üres, de az alatta vagy a fölötte lévő cellában van szám. Ez összesen 9 különböző ilyen cella. A 9 cella közül egyikben sem állhat (az eredeti táblázatban) az $1, 2, ..., n$ számok valamelyike és olyan is legfeljebb 8 lehet, amibe az $n+1, n+2, ..., n+8$ számok valamelyike kerül, azaz valamelyik cellában legalább $n+9$-nek kell állnia. Tudjuk, hogy az előbbi cella alatti vagy feletti cellában álló szám legfeljebb n, azaz biztosan van olyan különbség, ami legalább 9.

   Nem minden kitöltésnél van olyan különbség, ami legalább 10: például ha az i. sor j. helyére mindig $9(i-1)+j$ kerül, az egymás melletti számok különbsége 1, az egymás alattiak pedig 9.

2. **Megoldás:** Ez egy 1996-os Nemzetközi Magyar Matematika Verseny feladat volt a 12. évfolyamon (5. feladat):

   http://nmmv.berzsenyi.hu/feladatok/1996

3. **Megoldás:(Kovács Viktória)**

   Elég a 3,c részről belátni, hogy igaz az állítás.

   Indirekt módon bizonyítjuk, feltesszük, hogy nincs végtelen hosszú lánc, tehát csak véges van. Felvesszük ezeket a láncokat, mivel nincs végtelen hosszú, ezért mindegyik láncnak valahol vége van. Bejelöljük azokat a pontokat, melyeknek a koordinátái egy lánc végét jelentik (ha van olyan téglalap, amelyik tartalmazza az egyik ilyen pontot, akkor ez a pont nem is jó). Ezek a megjelölt pontok közül kiválasztunk egyet, ez legyen (n, k). Ekkor a $[1, n] \times [1, k]$ részben nem lehet megjelölt pont (azért mert (n, k) akkor nem lenne megjelölt, mert (n, k) téglalap tartalmazza). A $[1, n-1] \times [k+1, \infty]$ részben minden oszlopban maximum 1 lehet, különben kettő tartalmazná egymást. Ezeknek a koordinátái legyenek $(1, a_1), (2, a_2), ...(n-1, a_{n-1})$, ha léteznek. Minden ilyen oszlopban lehetnek még pontok a megjelölteken kívül, de szigorúan csak a megjelöltek alatt.

   Hasonló módon a $[n+1, \infty] \times [1, k-1]$ területen lévő megjelölt pontok koordinátái: $(b_1, 1), (b_2, 2), ...(b_{k-1}, k-1)$. Ekkor az összes pont (téglalap) maximális száma $(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + n) + (b_1 + b_2 + ... + b_{k-1} + k) - nk$. Ez véges, tehát nincs végtelen számú téglalapunk, emiatt ellentmondásra jutottunk. Így biztosan létezik végtelen hosszú lánc tartalmazásra.

4. **Megoldás:** Nem lehetséges. Számozzuk meg a fákat 1-től 14-ig, és minden állapotban írjuk fel a mókusok fáinak sorszámösszegét. Ez kezdetben $1 + \ldots + 14 = 105$, azaz páratlan. Vegyük észre, hogy egy ugrás után ez az érték csak páros számmal változhat, ám ha minden mókus ugyanazon a fán lenne, az összeg páros lenne, ami lehetetlen.

5. **Megoldás:** Ez a feladat 1991-ben volt válogatófeladat az IMO-ra (2. feladat). Megoldását megtaláljátok a KöMaL adatbázisában, 1991/május, 2. cikk (213. oldal):

   http://db.komal.hu/KomalHU/