

2015 októberi (számelmélet) feladatsor

Beadási határidő: október 31.

1. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész számnak van olyan többszöröse, ami 0-tól 9-ig az összes számjegyet tartalmazza legalább egyszer!
2. a) Milyen p prímszámokra írható fel p valamelyik hatványa két köbszám összegeként?
b) Igaz-e, hogy ha egy prímszámnak létezik ilyen hatványa, akkor végtelen sok ilyen hatványa létezik?
3. Egy S különböző pozitív egész számokból álló halmazban egyik számnak sincs 30-nál nagyobb prímosztója.
a) Igazoljuk, hogy ha $|S| = 2015$, akkor lehetséges, hogy nincs három olyan szám közöttük, amelyek szorzata köbszám.
b) Igazoljuk, hogy ha $|S| = 60000$, akkor biztosan van köztük három, amelyek szorzata köbszám.
4. Egy szám négyzetmentes, ha minden prímosztója első kitevőn szerepel a prímfelbontásában. Igazoljuk, hogy megadható 100 egymást követő szám, melyek egyike sem négyzetmentes.
5. Határozzuk meg azokat az x egész számokat, melyekre $\frac{x^{2016}-1}{x-1}$ négyzetszám!
6. Keressük meg a pozitív egész megoldásait: $9^a - b^2 = 5^c$.