Novemberi feladatsor

1. feladat Vegyünk fel $n+1$ különböző számot a $[0,1]$ zárt intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy létezik közöttük két különböző szám a és b $(a \neq b)$, hogy $ab|a-b| \leq \frac{1}{3n}$

2. feladat Legyenek n, m, M pozitív egész számok amikre teljesül $1 \leq m \leq n$ és $1 \leq M \leq \frac{m(m+1)}{2}$. Legyen $A \subseteq (1, 2, ...n)$ úgy, hogy $|A| = m$, azaz A az első n pozitív egész szám tetszőleges m elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $B \subseteq A$, amire $0 \leq \sum_{b \subseteq B} b - M \leq n - m$.

3. feladat Legyenek a, b, c valós számok, melyekre $a \geq bc$, $b \geq ac$, $c \geq ab$.
Mennyi az $abc(a-bc)(b-ca)(c-ab)$ kifejezés lehetséges legnagyobb értéke?

4. feladat Legyenek $x, y, z > 0$ valósak. Lássuk be, hogy $\frac{x^3}{z^3+x^2y} + \frac{y^3}{x^3+y^2z} + \frac{z^3}{y^3+z^2x} \geq \frac{3}{2}$.

***5. feladat** Bizonyítsuk be, hogy bármely $n > 1$ egészhez létezik végtelen sok x, y $(x \neq y)$ pozitív egész $1 < x < y$, amire $x^n + y | x + y^n$

***6. feladat** Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget $a_1, a_2, ...a_n$ pozitív valós számokra: $\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + ... + a_n)} \cdot \sum_{i<j} a_i a_j$