2016 januári vegyes feladatsor

1. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\angle = ABC\angle = 110°$, $BCD = 35°$, $CDA\angle = 105°$, továbbá az AC szakasz felezi a $DAB\angle$ szöget. Határozzuk meg $ABD\angle$ szög értékét!

2. Legyenek A, B, C, és D olyan síkbeli pontok, amelyekre $AD||BC$ teljesül. Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, és tegyük fel, hogy I egyben a $DBC\triangle$ magasságpontja. Igazoljuk, hogy $AB + AC = 2BC$.

3. Egy sorozatot KÉTesnek hívunk, ha első tagja is 1 és bármely egymást követő két tagjának összege kettőhatvány. Keressük meg a legrövidebb sorozatot, aminek utolsó tagja 2011.

4. Legyen n pozitív egész, keressük meg az összes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amely teljesíti minden egész x, y számpárra az $f(x + y + f(y)) = f(x) + ny$ egyenletet.

5. Hipochonder Hippolita a tavalyi évben minden nap 3 tizedesjegy pontossággal felírta a legmagasabb lázát. Barátnője, Honória szeretné tudni, tényleg annyira beteg volt-e, emiatt hiányzott-e egész évben, de Hippolita így szól: azt nem árulom el, mikor mennyi volt, de ha rákérdezel 3 napra, elmondom, mikor volt a legmagasabb, mikor a legalacsonyabb a lázam. Sorba tudja-e rendezni 2016 ilyen kérdés alapján Honória a lázgörbe 365 különböző értékét?