2016.02

1. (a) Létezik-e 2016 különböző pozitív egész szám, hogy összegük osztható ezen számok mindegyikével?

   (b) Létezik-e 2016 különböző pozitív egész szám, hogy összegük osztható ezen számokból képzett kéttagú összegek mindegyikével?

2. Az $ABCD$ húrnégyszögben AC és BD átlók P-ben metszik egymást. Legyen E és F rendre a P-ből AB-re illetve CD-re bocsátott merőleges talppontja. A BF és CE szakaszok Q-ban metszi egymást. Igazoljuk hogy PQ és EF egyenesek merőlegesek egymásra.

3. Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós polinom. Tegyük fel, hogy valamely m és n egészekre

   $$P(m)P(n) = -(m-n)^2$$

   teljesül. Igazoljuk, hogy $P(m) + P(n) = 0$

4. András és Balambér a következő játékot játsszák. Először is választanak egy pozitív egész N számot, ezután felváltva számokat írnak fel a táblára. András kezdésképp felírja az 1-et. Ezután minden soron következő játékos, amennyiben a legutóbb felírt szám n volt, vagy az $n+1$ vagy a $2n$ számot írhatja fel, feltéve, hogy $2n$ nem nagyobb N-nél. Aki az N-et írja fel, nyert.
   (a) Kinek van nyerő stratégiája, ha $N = 2016$?
   (b) Határozzuk meg a $N \leq 2016$ számokat, amire Balambérnak van nyerő stratégiája.

5. Keressük meg az összes pozitív egész n-et melyre minden egész k-hoz létezik egy egész a szám, amivel $n|(a^3 + a - k)$ oszthatóság teljesül.

6. Adott valós a, b, c számok közül nincs kettő megegyező vagy 0-összegű Igazoljuk, hogy -

   $$(1) \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \geq 2$$

   $$(2) \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

   (az összegzés ciklikusan történik a három változóban, ezt jelzi a *cyc*.)

7. Keressük meg az összes valós együtthatós $p(x)$ polinomot, amelyre

   $$p(a+b-2c) + p(b+c-2a) + p(c+a-2b) = 3p(a-b) + 3p(b-c) + 3p(c-a)$$

   teljesül minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ helyettesítés esetén.