Vegyes feladatsor - 2017 január

1. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész. Egy n fős társaságban senki sem ismer mindenkit (az ismerettség kölcsönös). Milyen n-re lehet a társaságot két nemüres (diszjunkt) csoportra bontani úgy, hogy mindenkinek legalább annyi ismerőse legyen a saját csoportjában, mint a másikban?

2. Moszkvában 16 titkos ügynök dolgozik. Minden titkos ügynök legalább egy másik ügynök után kémkedik, de semelyik két ügynök sem kémkedik egymás után. Tudjuk, hogy bármely 10 ügynököt sorba lehet úgy rendezni, hogy körbekémkedjék egymást (azaz az első a második után kémked, a második a harmadik után, ..., a tizedik pedig az első után kémkedik.) Bizonyítsuk be, hogy ekkor bármely 11 ügynököt is sorba lehet úgy rendezni, hogy körbekémkedjék egymást!

3. Legyen n egy pozitív egész szám. Az $1, 2, \dots, 2n$ számokat n darab párba osztjuk. Ezek közül legalább hány pár áll két egymáshoz relatív prím számból?

4. Legyen ABC egy nem egyenlőszárú háromszög, az A-ból induló belső szögfelező metszéspontja a BC oldallal A_1, az A-ból induló külső szögfelező metszéspontja a BC oldalegyenessel A_2. Hasonlóan definiáljuk a B_1, B_2, C_1, C_2 pontokat. Legyen az A, A_1, A_2 háromszög körülírt köre k_1 s hasonlóan definiáljuk k_2-t és k_3-at.

   (a) Bizonyítsuk be, hogy k_1, k_2 és k_3 ugyanabban a két pontban metszik egymást!

   (b) Legyen ez a két pont S és R. Bizonyítsuk be, hogy S-nek (és R-nek) a háromszög oldalegyeneseire vett merőleges vetületei egy szabályos háromszöget alkotnak!

5. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x, y \in \mathbb{R}$-re teljesül a következő egyenlet:

$$f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy).$$

6. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ tetszőleges valósak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}$$