

Vegyes feladatsor - 2017 március, hétvégére

1. Legyen az e egyenes az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének érintője a B pontban. A háromszög H magasságpontjának e -re való vetületi képe K , míg az AC oldal felezőpontja L . Igazoljuk hogy BKL egyenlő szárú háromszög.
2. Legyen A pozitív egészeknek egy véges halmaza. A -nak két diszjunkt halmazra (A_1, A_2) való felbontását *érdekesnek* nevezzük, ha A_1 elemeinek legkisebb közös többszöröse megegyezik A_2 elemeinek legnagyobb közös osztójával. Legalább hány darab eleme van A -nak, ha pontosan 2016 érdekes felosztása van?
3. Keressük meg az összes P valós együtthatós polinomot, amelyre minden valós x esetén igaz a következő egyenlet: $P(x)P(x+1) = P(x^2)$.
4. Legyen az ABC háromszögben C -nél derékszög. Legyen C -ből a magasság talppontja H . Válasszuk a D pontot BCH háromszögön belül úgy, hogy a CH szakasz felezze az AD szakaszt. Legyen P a BD és CH egyenesek metszéspontja. Legyen w az BD átmérő fölé rajzolt félkör, ami metszi a CB szakaszt. A P -ből w -hez húzott érintő érintse w -t Q -ban. Mutassuk meg, hogy a CQ és AD egyenesek metszéspontja w -n van.