Language: **Hungarian**

Day: **1**

2019. november 15., péntek

1. Legyenek az a, b, c valós számok olyanok, hogy
$$|a-b| \geq |c|, |b-c| \geq |a|, |c-a| \geq |b|,$$
ahol $|x|$ az x abszolútértékét jelöli. ($|x| = x$, ha $x \geq 0$ és $|x| = -x$, ha $x < 0$.) Bizonyítsd be, hogy az a, b, c számok közül az egyik a másik kettő összege.

2. Keresd meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre nem létezik olyan (a, b, c) pozitív egész számokból álló számhármas, hogy
$$n = \frac{a \cdot [b,c] + b \cdot [c,a] + c \cdot [a,b]}{[a,b,c]},$$
ahol $[k_1, k_2, ..., k_m]$ a $k_1, ..., k_m$ számok legkisebb közös többszörösét jelöli.

3. Legyen az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 2 \cdot ABC\sphericalangle$. Tegyük fel, hogy létezik egy P pont a háromszög belsejében, amelyre $AP = BP$ és $CP = AC$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $PBC\sphericalangle = 30°$.

4. Legyen n pozitív egész és tekintsünk egy $(2n+1)\times(2n+1)$-es táblát, melynek néhány mezője fekete, a többi pedig fehér. Egy lépésben kiválasztunk egy tetszőleges sort vagy oszlopot, és az összes mezőjét arra a színűre festjük, amelyik szín eddig többségben volt az adott sorban/oszlopban. A kiindulási színezést fehéríthetőnek, illetve feketíthetőnek nevezzük, ha belőle véges sok, alkalmasan választott lépéssel elérhető, hogy az egész tábla fehér, illetve fekete legyen.

   (a) Bizonyítsd be, hogy minden színezés fehéríthető vagy feketíthető!

   (b) Bizonyítsd be, hogy minden n esetén létezik olyan színezés, amely fehéríthető és feketíthető is!

   (c) Adott n esetén mi a legkisebb olyan k, hogy minden pontosan k fekete mezőt tartalmazó színezés feketíthető?

   (d) Adott n esetén mi a legkisebb olyan k, hogy van olyan pontosan k fekete mezőt tartalmazó színezés, amely feketíthető?

Rendelkezésre álló idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.