Gondolatok (véges) matematika tanulásáról, és vizsgára készülés kapcsán. (elsősorban elsőéves tanárszakosoknak)

A középiskolából az egyetemi képzésbe átlépve másfajta képzési formával és módszerekkel találkozunk. Az Előadás+Gyakorlat szisztéma célját tekintve is eltér attól, ahogy gimiben foglalkozunk matematikával: nem feldolgozási mintát kíván nyújtani elsődlegesen (hiszen arról a módszertani tárgyak szólnak), hanem
- a matematika felépítését, összefüggéseit szeretné egyben, koncentráltan megmutatni az egyes általános és gimnáziumi matematikához kapcsolódó területeken
- az előadásokon a matematikai precíz megfogalmazási mód és a szemlélet kapcsolata nagyon hangsúlyos; cél, hogy az egyes területek kérdésfelvetéseinek motivációja, és a fő matematikai eredmények egymásra épülése tisztává váljék.
- a gyakorlatokkal kívánja elérni, hogy a kulcsfogalmak beérjenek, feladatmegoldásban is jól tudják használni a tanárszakra készülők; a bizonyítási módokban jártasságot szerezzenek.

Mindez visszahat arra is, hogy miként érdemes készülni a számonkérésekre. Talán nem elég magától értetődő, de az új tanítási forma új tanulási mechanizmusok beépítésére hív. Sokan úgy érkeznek matematikatanári képzésre, hogy a feladatmegoldások öröme volt a matematika legvonzóbb vonása; és ezzel együtt más tárgyakhoz képest talán készülni sem kellett külön az órákra, dolgozatokra: elegendő volt az órai aktív figyelem és a HF-ek gyors elvégzése. Az egyetemen általában a legjobbaknak (akár nemzetközi versenyen résztvevőknek is!) át kell tudni állni arra, hogy időt kell szánni a matematika tanulására is, a feladatmegoldások mellett. Erről a tanulásról szeretnék bővebben megosztani néhány jellemző tapasztalatot.
Másrészt feladatmegoldási módszerekben rutin csakis úgy szerezhető, ha az ember nem csak olvas és lát különböző megoldásokat, hanem maga is sok feladatot megold (és esetleg számos feladat megoldásában elakad, megtapasztalva a probléma reprezentálási, vagy megoldási nehézségét). Ez különösen fontos olyan hallgatóknak, akik középiskolában még kevesebb kombinatorikai feladattal találkoztak társaikhoz képest, és emiatt hátrányból indulnak.

I. Gyakorlat és Előadás: kéz a kézben.

Az EA ugyan hivatalosan nem kötelező, de a tapasztalatok szerint általában még akkor is nagyon hasznos részt venni rajta, ha valaki úgy érzi, hogy korábbi alkalommal elveszítette a fonalat, vagy nehéz követnie: a vizsgára készüléskor még a nagyon részleges megértés is sokat tud segíteni ahhoz, hogy az anyagrész összeálljon. A gyakorlatok nagyban építenek az EA-on elhangzottakra: mind a matematikai modellalkotások, mind a használni kívánt állítások és tételek, mind a bizonyítási módszerek tekintetében. Így a gyakorlatokon való eredményes részvételnek nagyrészt előfeltétele, hogy az előadáson elhangzottakkal tisztában legyen az ember.
Az előadást ugyanakkor a gyakorlat sok szempontból kiegészíti: sok példát látunk arra, hogy lehet egy matematikai modellt használni, vagy arra, hogy egy matematikai állítás feltételeinek mi a jelentősége: nélkülük miért nem teljesül a vizsgált tulajdonság. A gyakorlat nem arra szolgál, hogy a táblánál feladatmegoldásokat lássunk, hanem elsődlegesen arra, hogy gyakorlatot szerezzünk a témakörhöz kapcsolódó gondolkodási módszerekben és a fogalmak helyes használatában. Ez azt jelenti, hogy az egyéni (vagy akár csoportos) munka a lényegi része, tehát tipikusan az, ami NEM a gyakorlaton történik, hanem a gyakorlatok között. Minél több időt szánunk rá félévközben a feladatmegoldásokra, annál inkább várhatjuk, hogy sikerül a gondolkodási sémáinkba beépíteni a tanult módszereket és megközelítéseket. Ez egy hosszú távú tanulási folyamat: nem konkrét ismeretet tanulunk meg vele, hanem matematikáról helyesen gondolkodni. Ezért is van, hogy egy-két nappal zárthelyi előtt nagyon nehéz (lényegében lehetetlen) bepótolni egy

több hónapos otthoni készület elmaradását: nincs idő a különféle feladatok közötti analógiák és különbségek felfedezésére és megértésére, az összefüggések mélyebb megértésére – ami útba igazíthat, hogy egyes megközelítések miért lesznek célravezetőek míg másoknak miért nem érdemes nekikezdeni. Vagyis röviden: a gyakorlatok **sikeres teljes**ítése (és a megfelelő gyakorlat, feladatmegoldási készségek megszerzése) **az óráról órára készüléssel érhető el**. (Ha nem is sikerül megoldani a feladatok egy részét, az sem olyan nagy baj: a következő órán sokkal világosabb lesz, hogy miért nem működött az egyik út, és mi egy másik megközelítés előnye.)

II. Matematikai állítások, összefüggések megértése
Fontos érteni, hogy a matematikai megértésnek és ezzel párhuzamosan egy vizsgára való felkészültségnek több szintje van, közöttük átmeneti állapotokkal.

A **megértés első szint**jének vehetjük azt, hogy **formailag és logikailag helyesnek lát**juk a levezetéseket, bizonyításokat: azonosítjuk, hogy a következtetési láncolat helyesnek tűnik, a definiált fogalmaknak van értelmük. Ehhez sokszor el kell engednünk azt az elvárásunkat, hogy úgy olvassunk matematikai írást, ahogy szépirodalmat olvasunk: rendszeresen hosszabban is el kell időzni egy-egy gondolat mellett, vagyis várhatóan lassan fogunk haladni.

A megértés következő, **második szint**jén már lehet, hogy azt is értjük (felszínesen): mi a kérdésfelvetés? miért érdekes ez: hol lehet használni (matematikában másutt, vagy matematikán kívül?) Mik azok a változók, amin múlik az vizsgált gráfelméleti tulajdonság vagy mitől működik egy megközelítés egy adott (leszámolási) problémánál? El tudjuk választani a hibás és a jó megközelítést. Ennek alapos átgondolása sokkal több időt igényel, mint a definíció elolvasása. Viszont, ha a fogalmak a helyükön vannak, értjük őket, akkor általában a fogalmakat használó egyszerűbb állítások kellően világosak első olvasásra is – a bizonyítást is ki tudnánk találni hozzá, és felismerjük, ha esetleg egy kapcsolódó állítást rosszul jegyeztünk meg.

Ennél **még magasabb szint**re lépve a **globális összefüggések**et is megértjük már. Ha egy állítást felidézünk, akkor természetesnek is tűnhet, hogy milyen úton lehet igazolni, és hogy milyen más állítással vagy fogalommal lesz szoros kapcsolatban bizonyítás: az összefüggéseket globálisan is értjük, és adott matematikai (leszámolási/gráfos modelles) gondolatok használhatóságának körét is felismerjük. Ez már egy igen magas szint; ugyanakkor az is igaz, hogy erre a szintre eljutva válik biztossá a tudásunk, és ha később egy konkrét összefüggést nem is tudunk felidézni azonnal, jegyzetbe tankönyve belenézve gyorsan előhívhatóvá válik, vagy önállóan végiggondolhatóvá – ami a tanítási helyzetben, napi 4-5 órára készület szükségessége mellett hatalmas kincs.

III. Tanulás: a gondolkodás és megértés elmélyítése.
A fentiekkel összhangban világos, hogy a **matematikai ismeretek elsajátításának a szövegszerű tanuláshoz** (lásd: memoriter) **semmilyen kapcsolata nincsen**. A gondolkodásfejlesztésünk és megértésünk egyik pillér a feladatmegoldásokból szerzett gyakorlat, a készségfejlesztés, a másik pedig ezzel szinkronban az összefüggések és módszerek elemző-értő elsajátítása.

A vizsgára tanulás során ennek megfelelően a fogalmak és definíciók **alapos megértése** (és nem képletszerű rögzítése!) a belépő, erre épülhetnek fel a fogalmakra jellemző alaptulajdonságok és egyszerű összefüggések, majd az állítások. Az állítások bizonyításának megtanulása előtt is érdemes végiggondolni: valamilyen szempontból megfelel-e a várakozásunknak az, amit a tétel állít? A szükséges feltétel(ek) szükségessége világos-e? *(Például: Euler-körséta létezéséről szóló tételnél miért fontos, hogy ne legyen több olyan összefüggőségi komponens, ami tartalmaz élet? Miért szükséges, hogy ne legyen páratan fokú csúcs?)*

A szóbeli vizsgára készüléshez tehát a következőket hasznos végiggondolni:

- Hogyan mondanám el egyszerűen és röviden ezt 8. osztályosoknak a vizsgatétel fő fogalmait: mivel motiválnám, mi a fő fogalom, mi a fő állítás?
- Fogalomalkotás kapcsán: mi tartozik ide? Mi nem tartozik ide? Példák.
- Mi a fő állítás bizonyításának kulcsa, egy mondatban? Min múlik, milyen korábbi összefüggésre, fogalomra épít?
- A leszámolási formula kiszámítási módja miért működik: miért így számolunk meg pontosan minden esetet egyszer?

III A: Tippek

- **Megszeretni.** Megtanulni azt lehet igazán jól, amit érdekesnek, szépnek és hasznosnak tartasz, amit megszeretsz. Mivel nagyobbrészt olyasmikkel foglalkozunk, amik visszaköszönhetnek a középiskolában, és tanárként nekünk is be kell mutatni, ezért elemi érdekünk, hogy motiválóan, érdeklődést kiváltóan tudjunk majd beszélni róla. Ha megértjük annyira, hogy megszeressük az egyes anyagrészeket, a megjegyzés sokkalta könnyebbé válik.
- **Időbeosztás.** Nagyon hatékonnyá teheti a készületet, ha előre elhatározzuk, melyik napig mikorra szeretnénk eljutni az anyag megértésében, hagyunk napot a vizsgatételek átgondolt kidolgozására, majd egy napot a frissítésre-reflexióra, még egyszeri átgondolásra is. Érdemes lehet pufferidőt is beépíteni, hogy ha megcsúszunk egy kicsit, még ne boruljon fel a készület. Ugyanis a fenti felépítés szerint a készület vége lesz az az idő amikor a teljes tananyag összefüggései tényleg beérhetnek és világossá válnak; és ha ez a végső készületi idő – ami relatíve rövidebb a korábbi megértési fázishoz képest idő hiányában – kimarad, kevés híján ugyan, de nem jutunk el a kívánt szintre.
- Segíthet sokat, ha **évfolyamtársakkal együtt készülünk**: kiderülhet, hogy ami nekünk természetes vagy egyszerű, az másnak nem – vagy fordítva. Így segíteni tudunk egymásnak, sajátunktól eltérő módon is ránézni ugyanarra a gondolatra vagy problémára. Időnként kiderülhet, hogy valaki egyszerűsítéssel élne (például egyszerűbb bizonyítást használna) de az nem jó, mert valamit nem vesz figyelembe vagy nem vonatkozik a teljesen általános helyzetre.
- **Segédanyagok használata**. Esetünkben (és általában más kurzusok esetén is) van egy kifejezetten az előadáshoz kapcsolódó írott jegyzet és van jó pár kapcsolódó könyv, segédanyag. Érdemes ezeket alaposan átnézegetni: sokszor kicsit más nézőpontból világítják meg ugyanazt a problémát és témát, és a többféle megközelítés segíthet a lényegkiemelésben.
- **Kérdezés az órán, konzultáció kérése**. Az oktatók (és a VM jelen oktatója különösen is!) annak örül és abban érdekelt, hogy mindenki minél teljesebben megértse a témakörünket és a bizonyítási gondolatok részleteit, motivációit. Elsőre még akkor is váratlannak vagy nehezen érthetőnek tűnhet egy-egy részlet, ha magasabb óraszámú matematikát tanultunk gimnáziumban; és sokszor a diáktársak is hasonló cipőben járnak. Könnyen előfordulhat az is, hogy az előadó-gyakorlatvezető véletlenül rosszul mond valamit vagy hibásan ír fel a táblára. Tehát gyakran közérdekű lehet és az oktató számára is előny/öröm, ha a diák a kérdezése révén kimutatja, hogy szeretne valamit jobban megérteni. Kérdezzünk bátran. Ugyanez vonatkozik a konzultációra is; nyilván konzultációt kérni főleg úgy fair, ha a diák a maga részéről megtette a szükséges lépéseket (jegyzet és irodalom elolvasása), és nem egyszerűen az előadás/gyakorlat megismétlését kéri, mert arra nem biztos hogy lesz elegendő idő/energia. De a cél, hogy mindenkinek tudjunk segíteni a témakör megértésben.

- **Vizsgatétel-vázlat készítése.** Hasznos tanulási segédeszköz lehet, ha **kidolgozzuk röviden, üres papírra,** lényegkiemeléssel a vizsgatételeket. (Definíciók, kulcsállítások és kap-

csolati hálójuk a bizonyítás kulcslépései alapján.) Úgy érdemes nekikezdeni, amikor már úgy látjuk, megértettük, amiről szól. Ez a kidolgozás célszerűen modellezi a vizsganapi vizsgafelkészülést is, és sokszor rámutathat arra, mi az, amit nem sikerült teljesen megértenünk. Így van lehetőség újra átnézni és értelmezni a bizonytalanul megőrzött összefüggést.
- **Saját jegyzet fontossága**. Egyszerű megoldásnak tűnik elkérni más tanuló-jegyzetét: ha más már kiemelte és összefoglalta a lényeget, sok idő és munka spórolható meg **látszólag**. Az igazság azonban az, hogy más vizsgavázlatának megtanulása nagyon könnyen elfedheti azokat a dolgokat, amiket ő nem írt ki, mert már megértett és természetesnek tart; így a vázlat memorizálása után könnyen kiderülhet, hogy alapvető hiányosságaink maradnak. Könnyen lehet hogy az ő gondolati építkezése más formában történik, mint a tiéd, így ami számára logikusnak tűnik rövid jegyzet-emlékeztetőként, az neked csak egy homályos utalás marad. Röviden: segédanyagnak hasznos lehet, de kizárólagos tanulási forrásnak nem ajánlott, a saját megértési folyamatot nem helyettesíti – ami a cél lenne.

IV. Személet vs. fogalmak és állítások egzakt ismerete

Általános iskolában mindenképpen, de középiskolában is részben kerüljük a nagyon egzakt, axiomatikus jellegű levezetéseket, az összefüggések ilyetén bemutatását. Ennek sokféle oka van (Fejlődéspszichológiai, szaktárgyi, motivációs, stb.) Ezzel együtt tanárként nagyon fontos látni az érme másik oldalát: matematikai megalapozás mellett hogyan működik a fogalomalkotás, hogyan lehet logikailag kifogástalan bizonyításokat bemutatni (meggyőző okoskodások helyett). Ez annál is inkább fontos, mert a „szemléletesen igaznak tűnik” megközelítés sajnos sokszor „behúzhat minket a csőbe”. (Ehhez kapcsolódik a „legrosszabb eset az, ha” típusú okoskodás, amikor nem magyarázzuk miért "legrosszabb" az valójában; és időnként nem is az!)
Így tanárként egy-egy anyagrészre kétféle szemmel is fontos tekintenünk. Egyrészt **egzakt módon hogyan fogalmazhatjuk meg az állításokat, miként definiáljuk a fogalmakat; másrészt: szemléletesen mit akarnak ezek a fogalmak megfogni, kifejezni**. *(Jó példa erre a gráfok definíciója: ha csak a szemléletes képre gondolunk, amikor pontokat összekötögetünk, akkor nehezebb lesz megmondani, mikor tekintünk azonosnak két gráfot, és így például a síkbarajzolható gráfokról is nehéz beszélni. Ha világos, hogy az élek a csúcspárok egy részhalmazát alkotják, és ezt csak reprezentáljuk összekötéssel, akkor kellő szabatossággal és világosan tudjuk megfogalmazni a definíciót és feltételeket.)* Ezekre azért is szükség van, mert ami nekem szemléletes és egyértelmű, az lehet, hogy a diákomnak már nem lesz az. *(Ha azt mondom, hogy ebben a gráfban minden csúcs minden más csúccsal össze van kötve, akkor szemléletesen gondolhatok arra is, hogy a gráf összefüggőségéről beszélek (úttal való összekötések), vagy konkrétan egy teljes gráfról (éllel összekötések).*
A precizitás tehát nagyon fontos. Természetesen azonban nem téveszthetjük szem elől azt sem, hogy milyen képet akarunk láttatni, és nagyon jó, ha egyszerre tudunk matematikailag pontosan is fogalmazni és úgy is, hogy egy 8. osztályosnak érthető legyen, amiről szólunk.