

## Vegyes feladatsor

1. Legyen  $ABC$  háromszög egyenlő szárú,  $AB = AC$ , továbbá legyen  $O$  az  $ABC$  háromszög körülírt körének a középpontja. Legyen  $D$  a  $BC$  szakasz egy pontja. A  $D$ -n áthaladó  $AB$ -vel párhuzamos egyenes az  $AC$  szakaszt  $E$ -ben metszi. A  $D$ -n áthaladó  $AC$ -vel párhuzamos egyenes az  $AB$  szakaszt  $F$ -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy  $A, E, O, F$  egy körön fekszenek.
2. Egy pozitív egész  $n$  számot *egyszerűnek* nevezzük, ha minden  $k \in [2, n]$  pozitív egész,  $n$ -hez relatív prím esetén a  $k$  prímszám. Hány 2-nél nagyobb *egyszerű* szám van?
3. Dominónak hívjuk a  $2 \times 1$ -es vagy  $1 \times 2$ -es téglalapot. Határozzuk meg, hányféleképpen helyezhetünk el  $n^2$  dominót átfedés nélkül a  $2n \times 2n$ -es sakktáblán úgy, hogy minden  $2 \times 2$ -es résztáblájában legalább 2 lefedetlen, azonos sorba vagy azonos oszlopba eső mezőt tartalmazzon!
4. Legyenek az  $a$  páratlan és a  $b$  páros számok relatív prímek. Legyen  $S$  egy halmaz, ami a következő feltételeknek megfelel:
  - i)  $a, b \in S$
  - ii) ha 3 nem feltétlenül különböző  $x, y, z$  számra  $x, y, z \in S$ , akkor  $x + y + z \in S$ .Bizonyítsd be, hogy minden  $2ab$ -nél nagyobb pozitív egész benne van  $S$ -ben!

Jó munkát! :)