2013. február 1., EGMO válogatóverseny

1. Az EF átmérőjű k kört az e egyenes az E pontban érinti. Tekintsük az e egyenes összes olyan A, B pontpárját, melyre az AB szakasz az E pontot tartalmazza, és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó. Egy ilyen A, B pár esetén legyen A' és B' a k kör metszéspontja az AF és BF szakaszokkal. Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'$ húrok egy ponton mennek át.

2. Egy H különböző egész számokból álló halmazban egyik számnak sincs 30-nál nagyobb prímosztója.

   a) Igazoljuk, hogy ha $|H| = 2013$, akkor lehetséges, hogy nincs három olyan szám közöttük, amelyek szorzata köbszám.

   b) Igazoljuk, hogy ha $|H| = 80000$, akkor biztosan van köztük három, amelyek szorzata köbszám.

3. Határozzuk meg az összes pozitív egész megoldását a következő egyenletrendszernek:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i = 5n - 4.$$

4. Egy városban három iskola van, ezek A, B és C, melyek mindegyikébe legalább egy diák jár. Bárhogyan választunk három diákot, egyet A-ból, egyet B-ből, egyet C-ből, van közöttük kettő, akik ismerik egymást, és van közöttük kettő, akik nem ismerik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az alábbiak közül legalább egy teljesül:

   Van olyan diák A-ban, aki minden diákot ismer B-ből.

   Van olyan diák B-ben, aki minden diákot ismer C-ből.

   Van olyan diák C-ben, aki minden diákot ismer A-ból.

A megoldásokat indokolni kell. Minden feladat teljes megoldása 7 pontot ér.

Megoldásvázlatok

1. feladat

A FBE $\angle = \beta$ és FAE $\angle = \alpha$ tangenseivel az $AE \cdot BE$ szorzat kifejezhető: $AE \cdot BE = EF^2 \tan\alpha \tan\beta$. Elég megmutatni, hogy az A'B' húr és EF metszéspontja, M pont $(\tan\alpha\tan\beta)$ függvényének arányában osztja az EF-et. Ez könnyen adódik, kihasználva hogy $FB'EA'$ olyan húrnégyszög, melyben EF átmérője a körnek, azaz derékszögek jelennek meg A'-nél és B'-nél; valamint azt, hogy FMB' és $A'ME$ hasonló háromszögek (a kerületi szögek tételéből adódó szögegyezések miatt), és hasonlóképp FMA' és $B'ME$ háromszögek is hasonló háromszögek. A megfelelő oldalak arányából ME, MF kifejezhető, és $ME : MF = \tan\alpha\tan\beta$.

Megjegyzés

Inverzióval is kihozható az állítás. Vázlat: Az alapkör kp-ja ekkor legyen F, sugara EF. Ekkor az $A'B'$ szakaszok metszéspontjai egy A, B-től független G pont képeként állnak elő. Természetesen a trigonometria is helyettesíthető színtiszta elemi geometriával.

2. feladat

Elöljáróban: 10 db 30-nál kisebb prím van. H elemeit törzstényezős alakjuk szerint osszuk be 3^{10} csoportba a következő módon: Legyen két szám egy csoportban, ha minden prímtényezőjük kitevője megegyezik $\pmod 3$.

a) Minden csoportban értelemszerűen végtelen sok szám van. Válasszunk kettőt-kettőt azon csoportokból, amelyekben az összes kitevő minden egyes prím esetén csak kétféle érték lehet $\pmod 3$. (pl 0 és 1 az összes esetén). Így $2 \cdot 2^{10} = 2048 > 2013$ számot kapunk. Ha ezek közül választunk hármat, akkor lesz a három között olyan prím, aminek a kitevője egyrészt nem ugyanaz mindháromszor (mert minden csoportból 2-t vettünk max), másrészt nem három különböző érték $\pmod 3$. Így a szorzatuk biztosan nem köbszám.

b) A $3^{10} = 59049$ csoport közül mindegyik legfeljebb 2 számmal járulhatna hozzá H-hoz úgy, hogy ne legyen 3 H-beli szorzata köbszám. Így legalább 40.000 csoportból valóban választunk elemet. A csoportokat viszont triókba oszthatjuk aszerint, hogy a 2 prím kitevőjétől függetlenül a többi prím kitevőinek hármas maradéka megegyezik-e. (Így $(0, x_1, \ldots x_9)$, $(1, x_1, \ldots x_9)$ és $(2, x_1, \ldots x_9)$ azonos trióba tartozó csoportokat reprezentálhatnak, ha x_i az i. páratlan prím kitevőjének hármas maradéka.) Semelyik trióból nem jöhet mindhárom csoportból elem H-ba, így valójában legfeljebb $2/3 \cdot 59.049 < 40.000$ csoportból vehetünk elemet, hogy a köbszámmetességi tulajdonság megmaradjon.

Megjegyzés A b) részben könnyen igazolható, hogy 80.000 helyett 60.000-re is igaz az állítás, ha egy rögzített H-beli elem segítségével határozunk meg egymást kizáró csoport-párokat.

3. feladat

Kicsi n értékekre $(1, 2, 3)$ egyszerű vizsgálattal ellenőrízhető, hogy mik a megoldások. (Célszerű a reciprokos egyenlet alapján az eseteket vizsgálni. $n = 1, k_1 = 1$, illetve $n = 3, \{k_1, k_2, k_3\} = \{2, 3, 6\}$ adódik.) Ha n$>$ 4, akkor a számokra a számtani harmonikus közepet alkalmazva ellentmondásra jutunk (mert a számtani középnek, $(5n-4)/n$ legalább akkorának kéne lennie, mint a harmonikus középnek, ami n.) $n = 4$-nél léphet még fel egyenlőség, ekkor minden k_i egyenlő kell legyen (4-gyel), ami szintén jó megoldást is ad. Tehát ezek és csak ezek a megoldások.

4. feladat

Segédállítás Először belátjuk, hogy nem lehet olyan $3n$ hosszú láncot készíteni a diákokból, hogy a szomszédosak nem ismerik egymást, az első és az utolsó sem ismeri egymást, és az iskolájuk rendre $A, B, C, A, B, C, \dots$.

$n = 1$-re ez azt jelentené, hogy van három diák három különböző iskolából, akik közül senki nem ismer senkit. Ez ellentmond a feltételnek.

Tegyük fel, hogy van ilyen lánc, és vegyük ezek közül a legrövidebbet. Legyen ez $3n$ hosszú, már tudjuk, hogy $n \geq 2$. Nincs három, akik nem ismerik egymást, így az 1. és a 3., valamint a 3. és az 5. ismerik egymást. Úgy viszont a másik feltétel miatt az 1. és az 5. nem ismerik egymást, különben lenne három, akik mind ismerik egymást. Ekkor a sorozatból a 2., 3., 4. diákot kihagyva hárommal rövidebb ugyanilyen tulajdonságú sorozatot kapunk. De ez volt a legrövidebb ilyen, nem lehet rövidíteni. Tehát nincs ilyen sorozat.

Bizonyítás - 4. feladat Ha egyik állítás sem teljesül a feladatban, akkor egy A-beli diáktól kezdve mindig találunk egyet a következő iskolából, akit nem ismer. Mivel mindegyik iskolába véges sokan járnak, előbb-utóbb kapunk egy hurkot, ami egy olyan sorozatot jelentene, ami a fentiek szerint nem létezhet.

Ellentmondásra jutottunk, legalább az egyik állítás teljesül.

Megjegyzés

Indukcióval is működhet a bizonyítás (diákszámra vonatkozóan) – az egy-két fokkal körülményesebb.