Egyenlőtlenségek

Harmonikus-mértani-számtani-négyzetes közepek közötti összefüggés 2 tagra: $a, b > 0$ esetén

$$\min(a,b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a,b)$$

Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha $a = b$.

Schur-egyenlőtlenség:

$$x^p(x-y)(x-z) + y^p(y-z)(y-x) + z^p(z-x)(z-y) \ge 0$$

ahol $x, y, z \ge 0, p > 0$ (fontos külön eset: $p = 1$; ha p pozitív páros egész, akkor tetszüleges x, y, z valósakra igaz)

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x = y = z$, vagy kettő megegyezik és a harmadik 0.

Feladat: Bizonyítsd be!

Segítség: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \ge y \ge z$.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség:

$$({a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2) \ge (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2$$

ahol $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ valósak.

Feladat: Bizonyítsd be!

Segítség: $({a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2) - (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 = \sum_{i<j}(a_i - b_j)^2$.

Rendezési egyenlőtlenség:

Ha $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ és $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$ és $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőlege permutációja, akkor

$$x_1y_n + \cdots + x_ny_1 \le x_1y_{\sigma(1)} + \cdots + x_ny_{\sigma(n)} \le x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Csebisev- egyenlőtlenség:

$$x_1y_n + \cdots + x_ny_1 \le \frac{(x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n)}{n} \le x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Feladat: Bizonyítsd be!

Segítség: Használd a rendezési egyenlőtlenséget!

***Muirhead egyenlőtlenség:**

Definíció: egy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ szám n-es majorizál egy $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ szám n-est, ha

$$a_1 \ge \cdots \ge a_n, \qquad b_1 \ge \cdots \ge b_n, \qquad a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n \text{ és}$$

$$a_1 + \cdots + a_k \ge b_1 + \cdots + b_k \text{ minden } k < n\text{-re.}$$

Ekkor $\sum_{sym} {x_1}^{a_1} \dots {x_n}^{a_n} \ge \sum_{sym} {x_1}^{b_1} \dots {x_n}^{b_n}$ minden nemnegatív $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ szám n-es esetén.

Jensen-egyenlőtlenség:

Ha egy véges vagy végtelen I intervallumon az f függvény konvex, $a_1, \dots, a_n \in I, p_1, \dots, p_n$ pedig nemnegatív valósok, melyek összege 1, akkor

$$f(p_1a_1 + \cdots + p_na_n) \le p_1f(a_1) + \cdots + p_nf(a_n)$$

Ha f szigorúan konvex, akkor egyenlőség csak az $a_1 = \cdots = a_n$ esetben van.

***Karamata-egyenlőtlenség:**

Legyen az f valós függvény konvex az I intervallumon. Ha az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ szám n-es majorizálja a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ szám n-est, akkor $f(a_1) + \cdots + f(a_n) \ge f(b_1) + \cdots + f(b_n)$

Hasznos gondolatok:

- Ha egy egyenlőtlenség szimmetrikus a változóiban, akkor feltehetünk egy *nagyságbeli sorrend*et a változók között. Nem mindig segít, de jól jöhet (pl Schur).
- Ha egy egyenlőtlenség ciklikusan szimmetrikus (azaz ha a, b, c változók, akkor a változók $a \to b \to c \to a$ ciklikus permutálása nem változtatja meg az egyenlőtlenséget), akkor feltehetjük, hogy *valamelyikük a legnagyobb/legkisebb* (hiszen ha nem az, akkor addig forgatjuk őket, amíg oda nem érünk a legkisebbhez).
- Egy algebrai kifejezés $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ homogén k-adfokú, ha minden $\lambda > 0$ és $x_1, x_2, \dots, x_n$-re $A(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Egy egyenlőtlenség homogén k-adfokú, ha mindkét oldala az. Ilyenkor tetszőlegesen *skálázhatjuk az oldalakat*, tehát az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók helyett vizsgálhatjuk az egyenlőtlenséget a $\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n$ változókra, ahol λ tetszőleges pozitív valós. Hasznos lehet pl $\lambda = \frac{1}{x_1+x_2+\dots+x_n}$, vagy $\lambda = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}$.
- *Homogenizálás/dehomogenizálás:* ha egy egyenlőtlenség mellé meg van adva egy feltétel, pl $x+y+z=1$, akkor ezt felhasználhatjuk az egyenlőtlenség homogenizálására. Ha mondjuk az egyenlőtlenségben a bal oldal homogén másodfokú, a jobb oldal meg homogén elsőfokú, akkor a jobb oldalt beszorozhatjuk $(x+y+z)$ -vel, a bal oldalt meg 1-gyel, és egy homogén egyenlőtlenséget kaptunk. Vigyázat! Itt nem lehet már azt mondani, hogy tetszőleges skálázhatunk, mert ezt a feltétel egyenletünk megtiltja!
- *Helyettesítések:* egy egyenlőtlenség gyakran egyszerűbb alakra hozható, ha a változóit lecseréljük más változókra (esetleg a feltétel egyenlet kihasználásával). Példák:
  - Ha x, y, z a változók, akkor érdemes lehet az $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ új változókat bevezetni. Ekkor az a, b, c változókra kaptunk egy új feltétel egyenletet, hiszen $abc = 1$.
  - Ha a, b, c egy háromszög oldalai, akkor $a = x+y, b = y+z, c = z+x$ helyettesítéssel x, y, z pozitívak és a feltételt kezelhetővé tettük.
- *Teljes indukció:* n változós egyenlőtlenségnél érdemes megnézni kis n-ekre és teljes indukcióval próbálkozni.
- *Tologatós módszer:* az esetleges kényszer egyenlet megtartása mellett két változót egymás felé (vagy esetleg egymástól elfelé) tolunk és vizsgáljuk hogyan változik az egyenlőtlenség.
- Az *egyes tagokat egyenként becsülni*. Ez egy nagyon erős és sokféleképpen alkalmazható módszer, de általában nagy ötletre van szükség, hogy az egyes tagokat mivel lehet felülről becsülni.

  Feladat: $0 \le x, y, z \le 1$, bizonyítsd be, hogy $\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{(1+x+yz)} \le \frac{3}{x+y+z}$

  Megoldás: Itt $\frac{x}{1+y+zx} \le \frac{x}{x+y+z}$ könnyen látszik. A többi tagot is hasonlóan becsülve azonnal adódik az eredmény. Hogy hogyan lehet erre rájönni? Néha hasznos lehet az $\frac{x^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha}$ –nal próbálkozni egy később meghatározandó α értéke mellett. Vagy egy lineáris függvénnyel. Vagy más, hasonló szimmetriával rendelkező törtfüggvénnyel. Vagy… Érdemes odafigyelni, hogy hol van egyenlőség esete az eredeti egyenlőtlenségben, mert akkor a becsléseknél is mind egyenlőségnek kell fennállnia.

- Ha már végképp nincs más ötleted, akkor szimmetrikus, homogén egyenlőtlenségeknél kiszorzás után Muirhead-del és Schur-ral lehet próbálkozni.
- **Az egyenlőség esetét mindig vizsgáljuk meg külön! Akkor is, ha a feladat erre külön nem tér ki!**
- **Beszorzás/leosztás esetén figyeljünk oda, hogy biztosan pozitív-e az a tag, amivel végezzük a műveletet.**