Növő séták élrendezett gráfokban

R.L. Graham és D.J. Kleitman 1973-as cikke alapján

Szemerédi Levente

ELTE TTK

2020. április 15.

Tartalom

Definíciók, jelölések

- Az előadás során G-vel mindig az éppen vizsgált gráfot fogom jelölni, csúcsainak száma n, éleinek száma q lesz.
- Egy $N : E(G) \to \{1, \dots, q\}$ bijekciót *élrendezésnek* nevezünk.
- Egy $(e_1, \dots e_k)$ séta vagy út *növő*, ha $\forall i < j$-re $N(e_i) < N(e_j)$.
- $S(N, G)$-vel, illetve $U(N, G)$-vel jelöljük a G gráfban az N élrendezés szerinti leghosszabb séta vagy út hosszát.

Kérdések

Chvátal és Komlós vetette fel egy 1971-es cikkben (Some combinatorial theorem on monotonicity), hogy teljes gráfban legalább milyen hosszú élrendezett séta, illetve út található. A bemutatott cikk előbbire teljes, utóbbira részleges választ ad.
Néhány jelölés:

- $f(n) = \min_N S(N, K_n)$
- $g(n) = \min_N U(N, K_n)$

Alsó becslés $S(N, G)$-re

Tétel

Egy n csúcsú, q élű G gráfban a leghosszabb növő séta legalább $2q/n$ élet tartalmaz.

Bizonyítás

Legyen G' és G'' gráfok a $v_1, \ldots, v_n$ csúcsokon az $e_1, \ldots, e_{q'}$, illetve az $e_1, \ldots, e_{q'+1}$ élekkel úgy, hogy az $e_{q'+1}$ él a v_r és v_s csúcsok közt menjen.
Egy G gráfnál (a $v_1, \ldots, v_n$) csúcsokon jelöljük $s(v_k, G)$-vel a G-beli leghosszabb, v_k-ban végződő növő séta hosszát.
Ekkor tetszőleges j-re: $s(v_j, G'') \geq s(v_j, G')$.
De $s(v_r, G'') \geq s(v_s, G') + 1$ és $s(v_s, G'') \geq s(v_r, G') + 1$.
Összegezve a csúcsokra: $\sum_j s(v_j, G'') \geq 2 + \sum_j s(v_j, G')$.
Az üres gráfból kiindulva élenként egyesével felépítve a vizsgált G gráfunkat az előzőből kapjuk: $\sum_{j=1}^{n} s(v_j, G) \geq 2q$, amivel beláttuk az állítást.

Alsó becslés $S(N, K_n)$-re

Az előző tétel szerint az n csúcsú teljes gráfban mindig van legalább $n-1$ hosszú növő séta. Sőt amint később látni fogjuk, $n > 5$-re mindig ki lehet úgy színezni K_n-et, hogy ekkora legyen a leghosszabb növő séta. Azaz $f(n) = n - 1$.
Kisebb n-ekre: $f(3) = 3$, $f(4) = 3$ és $f(5) = 5$.

Alsó becslés $U(N, K_n)$-re

Tétel

Egy élrendezett n-csúcsú teljes gráfban mindig van legalább $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n-3}-1\right)$ hosszú növő út. Azaz $g(n) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n-3}-1\right)$.

Bizonyítás

Ez a bizonyítás hasonlóan fog menni, mint az előző. Legyen $\bar{G}$ egy élrendezett gráf. Legyen $u(v_k, \bar{G})$ a leghosszabb v_k-ban végződő út hossza. Legyen $e \in E(\bar{G})$; ekkor jelöljük $\bar{G}(e)$-vel azt a gráfot, amiben az e-t megelőző élek szerepelnek. Legyen $t(v_k, \bar{G})$ azon $v_k v_j$ élek száma $\bar{G}$-ben, minden növő útban, mely $u(v_k, \bar{G}(v_k v_j))$ hosszú, tartalmazza v_j-t.

Alsó becslés $U(N, K_n)$-re

Bizonyítás – folytatás

Vegyünk fel az aktuális $\bar{G}$ gráfunkhoz egy új csúcsot, $v_k v_j$-t, legyen ez a gráf $\bar{G}'$. Ekkor a következő lehetőségek közül legalább egy teljesül:

- $t(v_j, \bar{G}') \geq t(v_j, \bar{G}) + 1$
- $t(v_k, \bar{G}') \geq t(v_k, \bar{G}) + 1$
- $u(v_j, \bar{G}') \geq u(v_k, \bar{G}) + 1$ vagy $u(v_k, \bar{G}') \geq u(v_j, \bar{G}) + 1$

Ebből $\sum_k (u(v_k, \bar{G}') + t(v_k, \bar{G}')) \geq 1 + \sum_k (u(v_k, \bar{G}) + t(v_k, \bar{G}))$, így $\sum_k (u(v_k, K_n) + t(v_k, K_n)) \geq \frac{n(n-1)}{2}$.
Másrészt $t(v_k, K_n) \leq \frac{1}{2} u(v_k, K_n)(u(v_k, K_n) - 1) - 1$.
A kettőt összevetve $\sum_k u(v_k, K_n)(u(v_k, K_n) + 1) \geq n(n-1)$ adódik, Így az átlaga és a maximuma $u(v_k, K_n)$-nek eléri $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n-3} - 1\right)$-et.

Felső becslés $f(n)$-re

Jelölés: $S(G) = \min_N S(N, G)$

Lemma

Ha $G = \bigcup_k G_k$, akkor $S(G) \leq \sum_k S(G_k)$, azaz S szubadditív.

Bizonyítás

Legyen N_k és olyan élrendezése G_k-nak, amire $S(N_k, G_k) = S(G_k)$. Ekkor N_k-k indulálnak egy N rendezését G-nek: egymás után pakolva őket. Így teljesül: $S(G) \leq S(G, N) \leq \sum_k S(G_k)$, amivel beláttuk a lemmát.

Ekkor páros n-re: $n = 2m$, ekkor K_n felbomlik $n - 1$ diszjunkt 1-faktorra, amik diszjunk élekből állnak, így $f(2m) \leq 2m - 1$.

Felső becslés $f(n)$-re

Az előző lemma direkt alkalmazva páratlan csúcsú klikkekre $f(2m+1) \leq 2m+1$-et ad, így még ügyeskedni kell egy kicsit.
Vegyük észre, hogy egy k csúcsú G gráfra ha teljeül, hogy előáll egy páros kör, és abból kilógó nyúlványok uniójaként, akkor $S(G) = 2$. Elég megmutatni, hogy K_{2m+1} felbontható m darab ilyenre.
K_7, K_9 és K_11-nak van *speciális* felbontása: $K_n = \bigcup_i G_{n,i}$, melyek a fenti tulajdonsággal rendelkeznek. Ezentúl:

- A_n, B_n és $\{g_n\}$ K_n csúcsainak egy partíciója, hogy $|A_n| = |B_n| = m$.
- $\alpha_{n,i}$ és $\beta_{n,i}$ $G_{n,i}$-ben páros körökhöz tartoznak
- $\bigcup_i \{\alpha_{n,i}\} = A_n$ és $\bigcup_i \{\beta_{n,i}\} = B_n$

Felső becslés $f(n)$-re

Mostmár elég azt megmutatni, ha K_{2m+1}-nek és $K_{2m'+1}$-nek is van speciális felbontása, akkor $K_{2m+2m'+1}$-nek is.
Elkezdjük K_{2m+1} és $K_{2m'+1}$ egy-egy diszjunkt, speciális felbontásával, és g_{2m+1}-et azonosítjuk $g_{2m'+1}$-gyel. Így $2m+2m'+1$ csúcsunk van. Legyen: $A_{2m+2m'+1} = A_{2m+1} \cup A_{2m'+1}$, valamint $B_{2m+2m'+1} = B_{2m+1} \cup B_{2m'+1}$.

- $1 \leq k \leq m$-re $\alpha_{2m+2m'+1,k} = \alpha_{2m+1,k}$ és $\beta_{2m+2m'+1,k} = \beta_{2m+1,k}$, valamint $\{u,v\}$ él $G_{2m+2m'+1,k}$-ban pontosan akkor, ha $\{u,v\}$ él $G_{2m+1,k}$-ban vagy $u = \alpha_{2m+1,k}$, $v \in A_{2m'+1}$ vagy $u = \beta_{2m+1,k}$, $v \in B_{2m'+1}$.
- $m+1 \leq k \leq m+m'$-re $\alpha_{2m+2m'+1,k} = \alpha_{2m'+1,k}$ és $\beta_{2m+2m'+1,k} = \beta_{2m'+1,k}$, valamint $\{u,v\}$ él $G_{2m+2m'+1,k}$-ban pontosan akkor, ha $\{u,v\}$ él $G_{2m'+1,k}$-ban vagy $u = \alpha_{2m'+1,k}$, $v \in B_{2m+1}$ vagy $u = \beta_{2m'+1,k}$, $v \in A_{2m+1}$.

Ekkor m'-t 3-nak választva kapjuk, hogy ha K_{2m+1} felbontható, akkor K_{2m+7} is, amiből kapjuk, hogy $f(2m+1) = n-1$, ha $m \geq 3$.

Felső becslés $g(n)$-re

Vizsgáljuk K_{4m+k}-t. Particionáljuk 4 részre egyenlően: $S_1, \cdots, S_4$. Az élek sorrendje legyen a következő (nagyságrendben):

- Az $S_1, \ldots, S_4$-en belüli élek.
- Élek S_1 és S_2 közt, élek S_3 és S_4 közt.
- Élek S_1 és S_3 közt, élek S_2 és S_4 közt.
- Élek S_1 és S_4 közt, élek S_2 és S_3 közt.

Könnyű látni, hogy nem lehet olyan növő út, mely mind a négy partícióból tartalmaz élet. Így $U(K_{4m+k} \leq 3m + k - 1)$, azaz $g(n) = U(K_n) < \frac{3}{4}n$.