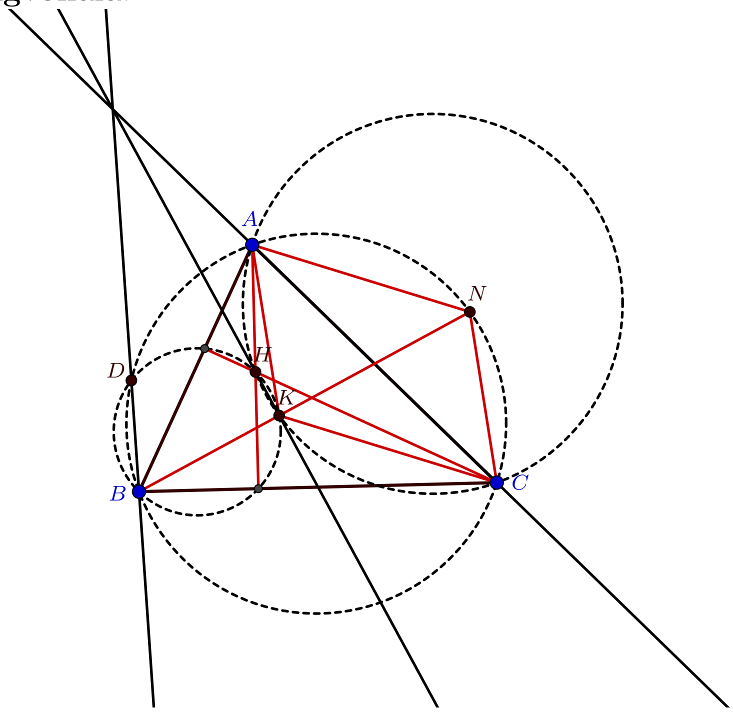
1. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyben $AB \neq BC$, legyen N a háromszög B-hez tartozó súlyvonalának és a körülírt körének második metszéspontja. Legyen H az ABC háromszög magasságpontja és D az a pont a körülírt körön, melyre $BDH\angle = 90°$. Jelölje továbbá K azt a pontot, melre $ACNK$ négyszög paralelogramma. Igazold, hogy AC, KH és BD egyensesk egy ponton haladnak át.

Két megoldást mutatunk: az első azon múlik majd, hogy a három egyenes **három** körhöz húzott páronkénti **hatványvonal**, a másik azon, hogy a három egyenes a BHF háromszög **három magasságvonala.**



1. Megoldás: Legyen a háromszög A, B, C csúcsánál levő szögei rendre α, β, γ, illetve jelölje k a háromszög köré írt kört. Mivel H magasságpont, ezért $ACH\angle = 90° - \alpha$ és $CAH\angle = 90° - \gamma$. Most belátjuk, hogy $ACKH$ húrnégyszög.

Egyrészt $AHC\angle = 180° - ACH\angle - CAH\angle = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \gamma) = \alpha + \gamma$. Másrészt felhasználva, hogy $ACKN$ paralelogramma és $ABCN$ húrnégyszög $AKC\angle = ANC\angle = ANB\angle + CNB\angle = \gamma + \alpha$ adódik. Tehát $AHC\angle = AKC\angle$, vagyis $ACKH$ valóban **húrnégyszög,** a köré írt kört jelölje k_1.

(2 pont)

$HKA\angle = HCA\angle = 90° - \alpha$, mert egy íven nyugvó kerületi szögek, továbbá $AKN\angle = KNC\angle = \alpha$, hiszen váltószögek. Így pedig $HKN\angle = HKA\angle + AKN\angle = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. K az N pont tükörképe az AC felezőpontjára, tehát rajta van a BN egyenesén, ahonnan $BKH\angle = 180° - 90° = 90°$.

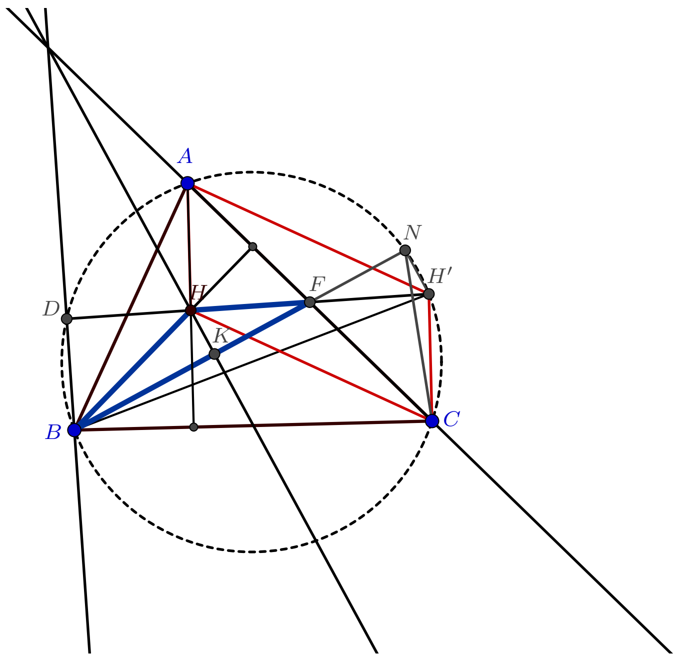
(2 pont)

A Thalesz tétel megfordítása miatt K és D rajta vannak BH Thalesz-körén, tehát $BDHK$ **húrnégyszög**, a köré írt kört jelölje k_2.

(1 pont)

A k , k_1, és k_2 **körök hatványvonalai egy pontban metszik egymást**. A k és k_1 kör hatványvonala az AC egyenes, a k és k_2 kör hatványvonala a BD egyenes, a k_1 és k_2 hatványvonala pedig KH, tehát ezek egy pontban metszik egymást.

(2 pont)



2. Megoldás: Legyen az AC szakasz felezőpontja F, és H pont tükörképe F-re H'. Ismert, hogy H' a körülírt **körre esik** (Feuerbach-kör és a körülírt kör kapcsolata). A tükrözés miatt $AHCH'$ **paralelgramma**, amiből $H'AC\angle = HCA\angle = 90° - BAC\angle$. N a körül írt körre esik, így az egy íven nyugvó kerületi szögek tétele miatt $CNB\angle = CAB\angle$ és $H'NC\angle = H'AC\angle$. Így $H'NB\angle = H'NC\angle + CNB\angle = 90° - BAC\angle + BAC\angle = 90°$.

(3 pont)

H' a H, míg K az N pont tükörképe F-re, emiatt $HKH'N$ paralelogramma, amiből $FKH\angle = FNH'\angle = 90°$, azaz HK **merőleges** BF-re.

(1 pont)

A Thalesz-tétel megfordítása miatt BH' átmérő. Egyrészt $BDH = 90°$ a feladat feltételei miatt, másrészt $BDH' = 90°$, mivel BH' átmérő, így D, H, H' egy egyenesre esnek. Mivel F H és H' között van, F is a DH **egyenesre esik, ami merőleges** BD-re.

(1 pont)

A BHF háromszög magasságvonalai éppen az AC, BD, és HK egyenesek, tehát ezek egy közös pontban metszik egymást.

(2 pont)

Töredék pontok. Ezek közül maximum az egyikre lehet pontot adni:
1 pont: Ha $AKC = \alpha + \gamma$, $AHC = \alpha + \gamma$, K rajta van a B-ből induló súlyvonalon, közül legalább 2 kettőt kiszámol
1 pont: Észreveszi, hogy $ACKH$ és $BDHK$ négyszögek húrnégyszögek, de nem bizonyítja egyiket sem.
1 pont: Ha észreveszi, hogy FK merőleges BN, és F, H, D pontok egy egyenesen vannak, de egyiket sem bizonyítja.
1 pont: BH' átmérő az ABC körülírt körében.

2.

(a) Igazoljuk, hogy létezik olyan (X, Y, Z) egész számokból álló számhármas a $(0, 0, 0)$-n kívül, melyekre $|X|, |Y|, |Z| \leq 10^6$, és amelyekre $|X + Y\sqrt{2} + Z\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

(b) Lássuk be, hogy olyan számhármas (X, Y, Z) is létezik, amelyre a fentin túl még $X \cdot Y \cdot Z \neq 0$ is teljesül.

(c) Igazoljuk, hogy olyan (X, Y, Z) egész számokból álló számhármas a $(0, 0, 0)$-n kívül nincs, melyekre $|X|, |Y|, |Z| \leq 10^6$, és amire $|X + Y\sqrt{2} + Z\sqrt{3}| < 10^{-21}$.

(a) Vegyük észre, hogy $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) < 10$ miatt a $(0, 10^6 d]$ intervallumba esik 10^{18} szám $10^6 \geq X, Y, Z > 0$-val, így skatulyaelv alapján lesz kettő, melyek távolsága kisebb, mint 10^{-11}. Különbségüket képezve a kapott X, Y, Z hármas jó lesz.

(2 pont)

Alternatívan $X = 0$, $10^6/(2\sqrt{2}) > Y > 0$, $10^6/(2\sqrt{3}) > Z > 0$ választás mellett van legalább

$$10^{12}/(4 \cdot 1,42 \cdot 1,74) > 10^{11}$$

számhármasunk. Skatulyaelv alapján így vannak olyan $X = 0$, $10^6/(2\sqrt{2}) > |Y| \geq 0$, $10^6/(2\sqrt{3}) > |Z| \geq 0$ nem mindhárom nulla egészek, melyekre $|X + Y\sqrt{2} + Z\sqrt{3}|$ mod 1 értéke kisebb 10^{-11}-nél (vagy az eredeti számok egyike, vagy kettőnek a különbsége). Ezen kívül a szám maga abszolútértékben legfeljebb 10^6, így tudunk hozzá megfelelő X-et is választani. Itt azon múlik a dolog, hogy $4\sqrt{6}(< 9,8) < 10$, vagyis a kerekítéseknél van mozgástér. Lehet úgy is próbálkozni, hogy X és Y a két szabad változó, s moduló $\sqrt{3}$ nézzük a dolgot, ekkor bővebb a hely a becslésekre.

(b) Tegyük fel, hogy van olyan $-10^6 \leq Y, Z \leq 10^6$, nem mindkettő 0, melyre $|Y\sqrt{2} + Z\sqrt{3}| < 10^{-11}$. Ekkor $|Y\sqrt{2} - Z\sqrt{3}| < 10^7$, és így a két szám szorzata $(2Y^2 - 3Z^2)$ egész, de nem lehet 0, miközben meg abszolútértéke legfeljebb 10^{-4}, ami ellentmondás. A másik két eset hasonlóan zárható ki.

(2 pont)

(c) Az előző alponthoz hasonló gondolatmenettel tekintsük az alábbi nemnulla egész számot

$$(X + Y\sqrt{2} + Z\sqrt{3})(X + Y\sqrt{2} - Z\sqrt{3})(X - Y\sqrt{2} - Z\sqrt{3})(X - Y\sqrt{2} + Z\sqrt{3}).$$

Ennek minden tényezője abszolútértékben legfeljebb 10^7, így miután a szorzat abszolútértékben legalább 1, nem lehet egyik tényező sem szigorúan -10^{-21} és 10^{-21} között. A szorzat 0-ságát az zárja ki, hogy $\sqrt{3}$ nem felírható 1 és $\sqrt{2}$ racionális együtthatós lineáros kombinációjaként: ez könnyen ellenőrízhető, négyzetre emelés után.

(3 pont)

Megjegyzések

Ha valaki az a) részben formálisan gyengébb korlátot ér el, mert a kerekítések elszámolása miatt nem eléggé optimalizálja az Y, Z változók felső korlátját - de valójában implicite a megoldása szó szerint átmegy

(2 pont)

Ha az a) részben valaki a második megközelítésnél a kerekítésekkel nem foglalkozik

(1 pont)

Ha az a) részben megpróbálkozik a skatulyaelvvel, de elvi hibát vét (például az előjeles különbségvételnél a tekintett nagy intervallumból kilép, vagyis tévesen állítja hogy mely skatulyákba esnek a számai).

(0 pont)

3. Határozzuk meg a λ valós szám minimumát, melyre teljesül hogy minden T területű konvex 2018-szög lefedhető egy $\lambda \cdot T$ területű paralelogrammával.

Megoldás:

A bizonyítás 2 részből fog állni. Először belátjuk, hogy ha $\lambda = 2$, akkor mindig létezik max λT területű paralelogramma, a második részben pedig azt, hogy minden 2-nél kisebb konstansra van ellenpélda, azaz olyan 2018-szög, amit nem lehet belerakni egy λT területű paralelogrammába, ha $\lambda < 2$.

1. rész: Vegyünk egy **tetszőleges irány**, hívjuk ezt **függőleges**nek. Ekkor vegyük az egyik legbaloldalibb (A), és a legjobboldalibb (B) csúcsot. Ez máshogyan mondva vegyük azt a két pontot, aminek az első koordinátája a legnagyobb vagy a legkisebb. Természetesen lehet, hogy több ilyen csúcs van, akkor választunk egyet közülük.

(1 pont)

Olyan **paralelogrammá**t fogunk csinálni, aminek **egyik oldalpárja függőleges, a másik pedig párhuzamos** AB**-vel**. Ennek megfelelően vegyük a C, D csúcsokat az alábbi módon: C legyen AB feletti AB-től egyik legtávolabbi csúcs, D pedig hasonlóan, az AB alatti, AB-től legtávolabbi csúcs.

(1 pont)

Belátjuk hogy ez jó. Nézzük azt a paralelogrammát, aminek oldalegyenesei az alábbiak: C-n, D-n keresztüli AB-vel párhuzamos egyenesek, A-n, B-n átmenő, függőleges egyenesek! Ezt az AB két kisebb paralelogrammává vágja, ezeknek területei t_c, t_d, a 2018-szöget pedig egy T_c és T_d területű részre. Mivel a sokszögünk konvex, így T_c-ben benne van az ABC háromszög, azaz $T_c \geq \frac{AB \cdot d(AB,C)}{2}$, ahol $d(AB,X)$ az az AB egyenes és az X pont távolsága. De $t_c = AB \cdot d(AB,C)$, azaz $t_c \leq 2T_c$. Hasonlóan kijön, hogy $t_d \leq 2T_d$, így $T_2 \leq 2T$, ahol T_p a paralelogramma területe.

(1 pont)

2. rész: Először 3-**szögre látjuk be** az állítást 2018-szög helyett. Azaz ha az $XYZT$ paralelogramma fedi az ABC háromszöget, akkor $T_{XYZT} \geq 2T_{ABC}$. Ha a paralelogramma valamelyik oldalán nincs háromszögnek csúcsa, akkor ezt az oldalt elkezdhetjük a paralelogramma közepe felé tolni egészen addig, amíg el nem érünk egy csúcsot. Elég erre a paralelogrammára belátni az egyenlőtlenséget, azaz feltehetjük, hogy $XYZT$ minden oldalán van háromszögcsúcs, de mivel 4 oldal van, és 3 csúcs, így van 2 oldal, ami osztozik, azaz a két sokszögnek van közös csúcs, ez legyen $X = A$.

(1 pont)

Tegyük fel, hogy nincs közös oldaluk. Mivel az AB egyenes meredeksége az XY és AC közé esik, így ha párhuzamost húzunk vele C keresztül, az el fogja metszeni a TX szakaszt, legyen ez a pont T', a metszéspontja pedig az YZ egyenessel legyen Z'. Most nézzük az $ABZ'T'$ paralelogrammát. Ez fedi ABC, van közös oldala vele, területe pedig kisebb, mivel az XY-nal párhuzamos oldalak távolsága nem változott, de a hosszuk csökkent, ugyanis $AT' < AT$. Azaz feltehetjük, hogy van közös oldaluk, ez legyen AB. De ekkor $T_{ABY'T'} = AB \cdot d(AB,C) = 2\frac{AB \cdot d(AB,C)}{2} = 2T_{ABC}$.

(1 pont)

Most rátérünk a 2018-szögre. **Konstrukció:** Vegyünk egy A_1, A_2, A_{2018} háromszöget,aminek területe 1, és az A_2A_{2018} oldalára rajzoljuk egy nagy sugarú körívet! A köríven vegyük fel a maradék 2015 csúcsot. Így a sokszög konvex lesz. A körcikk területét tudjuk felülről becsülni az A_2 és a A_{2018} pontokba húzott érintők, és a A_2A_{2018} által létrehozott háromszög területével, ami ha elég nagy a sugár, kisebb, mint x.

(1 pont)

Bizonyítás hogy jó: Ha egy paralelogramma fedi ezt a sokszöget, akkor fedi az $A_1A_2A_{2018}$ háromszöget is, azaz területe legalább 2. Tegyük fel, hogy van egy kettőnél kisebb $\lambda = 2 - y$ konstans, amire igaz a feladat állítása. Ekkor tudjuk, hogy $(2 - y)(1 + x) \geq 2$ az előző állítás miatt. Átrendezve azt kapjuk, hogy $(2 - y)x \geq y$. De ha x-et tetszőlegesen kicsinek választhatjuk, azaz $x < \frac{y}{2-y}$, akkor nem áll fenn az egyenlőtlenség.

(1 pont)

Azaz azt kaptuk, hogy a legkisebb ilyen szám a 2.

Pontozás:
1. rész: (a 2 jó)
egy jó paralelogramma megtalálása 2 pont (1 az irány, 1 a csúcsai)
bizonyítás, hogy jó paralelogramma 1 pont
2. rész: (2-nél nem lehet kisebb)
háromszögre az állítás 2 pont
jó példa 1 pont
bizonyítás, hogy jó 1 pont
Lehetséges hibák:
valaki legkisebb területű paralelogrammát vesz, de nem látja be, hogy van ilyen -1 pont

4. Legyen $n > 1$ egész. Egy bábuval lépkedünk egy körsétán egy $n \times n$-es sakktáblán úgy, hogy egy lépésben egy oldalszomszédos mezőre lépünk, és a táblán minden mezőt pontosan egyszer érintünk a kezdőmezőre visszaérkezésig (ahonnan megismételhetnénk a körsétát). Mutassuk meg, hogy létezik a sakktáblán két szomszédos mező, A és B úgy, hogy a körséta egymást követő lépéseit követve A-ból B-be, illetve B-ből A-ba is legalább $n^2/4$ lépést teszünk meg.

Megjegyzés: a körséta kezdőmezőjére visszatérő lépést a körséta első lépése követi a sorrend szerint.

Első megoldás:

Ha sakktáblaszerűen kiszínezzük az $n \times n$-es táblát, akkor a séta felváltva érint fekete, illetve fehér mezőket. Miután a végén a kiinduló négyzetre érkezünk vissza, ezért a **séta páros hosszú**, vagyis n^2 **páros szám**. Legyen $n = 2m$, ekkor $n^2/4 = m^2$.

(1 pont)

Induljunk ki egy tetszőleges négyzetből, és kövessük a sétát, **négy színnel kiszínezve a mezőket**. Az első m^2 darab négyzetet amit érintünk színezzük sárgára, a következő m^2 darabot pirosra, a következő m^2-et kékre, végül a maradék m^2 darabot pedig zöldre.

(1 pont)

Ha létezik két szomszédos négyzet, amik közül az egyik **sárga**, a másik **kék**, akkor ez a két négyzet jó lesz, mivel az egyik irányban bejárva a sétát mindegyik piros mezőt érintjük, amiből m^2 darab van, a másik irányban bejárva a sétát pedig mindegyik zöld mezőt érintjük, amiből szintén m^2 darab van. Tehát mindkét irányban legalább m^2 lépést teszünk meg. Hasonló módon ha van két szomszédos négyzet, amik közül az egyik piros, a másik zöld, akkor is készen vagyunk.

(1 pont)

Tegyük fel, hogy nincsenek ilyen szomszédos négyzetek. Nézzük azoknak a négyzeteknek az S halmazát, amik valamelyik **sárga négyzettel szomszédosak**. Az indirekt feltevés miatt ezek mindegyike piros vagy zöld. Az S-beli négyzetek mindegyike nem lehet piros, mert a séta utolsó lépésében, amikor a kezdőmezőre lépünk vissza, akkor egy zöld mezőről lépünk egy sárgára, tehát **van** közülük **zöld négyzet**, ami szomszédos egy sárga négyzettel. Mivel az az m^2-edik lépésben egy sárga mezőről egy pirosra lépünk, ezért az S-beli négyzetek között **van piros színű** is.

(1 pont)

A sárga négyzetek összefüggő tartományának határát körberajzolva találjuk az S-beli négyzetek határát, esetleg a tábla szélét. A **tábla széle a körberajzolásnál egy összefüggő szakasz** kell legyen, különben a mezőkön végzett teljes körséta során a sárga tartományon át kellene haladnunk többször, miközben az S-beli négyzeteken is áthaladunk; de ez a sorrend szerint lehetetlen. Tehát az S-beli négyzetek és a sárga tartomány közös határa is összefüggő szakasz, benne **zöld és piros színnel**; lesz tehát ilyen párból **szomszédos**. Ez azt jelenti, hogy van az S-ben két szomszédos négyzet, amik közül az **egyik piros, a másik zöld**. Az indirekt feltevés miatt nem lehetnek élszomszédosak, emiatt **csúcsszomszédosak**.

(1 pont)

Tekintsük azt a 2×2-es N négyzetet, **aminek egy-egy csúcsában ez a piros és zöld négyzet** van. Ekkor N-ben a másik két négyzet nem lehet sem piros, sem zöld színű, mert akkor lenne két élszomszédos piros és zöld négyzet. Tegyük fel, hogy a másik két négyzet sárga. Eközött a két sárga négyzet között van egy út, amiben csak sárga négyzetekre lépünk. Ennek az útnak a belsejében a piros és a zöld négyzet közül pontosan az egyik van benne. Tegyük fel, hogy a zöld négyzet van benne. Amikor a sétát bejárjuk, akkor először végigmegyünk a sárga négyzeteken, majd a pirosakon és utána a kékeken és végül a zöldeken. Valamikor a séta során az N-ben levő piros négyzetet is érintjük. Viszont ahhoz, hogy az N-ben levő zöld négyzetre lépjünk muszáj rálépnünk újra egy sárga mezőre, ami ellentmondás. Hasonló módon a piros négyzet sem lehet benne a sárga négyzetek közti útban. **Tehát az N-ben nem lehet a másik két négyzet sárga színű, tehát az egyik sárga, a másik kék**.

(1 pont)

Az N szomszédos négyzet-párjai közül az egyik jó lesz. Tegyük fel, hogy az N-ben levő szomszédos négyzetek sem teljesítik a feladat feltételét. Ha az N-ben levő sárga és piros négyzet közti távolság a sétában legalább m^2, akkor az a két négyzet jó lesz, mert a másik irányban bejárva a sétát az összes kék és zöld négyzet köztük van, tehát a távolságuk ott is legalább m^2. Tehát a két négyzet közti távolság kisebb, mint m^2. Hasonló módon a piros és kék, kék és zöld, zöld és sárga négyzetek közti távolság is kisebb, mint m^2. Viszont ez azt jelenti, hogy ha a sétát az N-beli sárga négyzetből kezdjük, akkor kevesebb, mint n^2 lépésben visszaérünk a kiindulási négyzetbe, ami ellentmondás.

(1 pont)

Második megoldás:

Ha sakktáblaszerűen kiszínezzük az $n \times n$-es táblát, akkor a séta felváltva érint fekete, illetve fehér mezőket. Miután a végén a kiinduló négyzetre érkezünk vissza, ezért a **séta páros hosszú**, vagyis n^2 **páros szám.** Legyen $n = 2m$.

(1 pont)

A sétát tekintsük úgy, hogy a csúcsok a négyzetek középpontjai és két csúcs A és B között akkor megy él, ha a séta során az A középpontú négyzetből a B középpontúba lépünk. A sétát jelöljük S-sel, a hossza $|S| = n^2$.

Gráfot rendelünk a "séta belsejéhez". Tekintsük a kis 1×1-es négyzeteknek azon csúcsait, amik a séta belsejében vannak és két csúcsot kössünk össze akkor, ha mindkettő csúcsa ugyanannak a négyzetnek (vagyis a távolságuk 1). A kapott **gráf összefüggő, és nincs benne kör, mert** ha lenne, akkor az a kör tartalmazná az egyik kis négyzet középpontját és ezért a séta nem mehetett át ezen a négyzeten. Tehát a gráf egy fa, jelöljük T-vel, a csúcsainak számát pedig $|T|$-vel. Nyilván T-ben minden csúcs foka legfeljebb 4.

(2 pont)

Először **belátjuk, hogy** $|T| = 2m^2 - 1$. Tekintsük azokat a négyzeteket, amik oldala 1 egység hosszú, és a középpontja csúcsa T-nek. Ezen négyzetek kerületeinek összege egyfelől $4|T|$. Másfelől a négyzetek oldalai lefedik a sétát, a kimaradt oldalak pedig metszik a T egyik élét mindegyiket pontosan egyszer. Emiatt a négyzetek kerületeinek összege $n^2 + 2(|T| - 1)$. Vagyis $2|T| = n^2 - 2$, így $|T| = 2m^2 - 1$.

(1 pont)

Most be fogjuk látni, hogy **létezik a T-nek olyan éle, amit elvéve a fából a kapott két fa éleinek száma legalább** $\frac{1}{4}(|T| - 1)$. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Legyen x_0 egy tetszőleges csúcsa T-nek. Ha az x_0 csúcsot elvesszük, akkor a T négy fára esik szét, ezek legyenek T_1, T_2, T_3, T_4 (néhánynak közülük lehet 0 csúcsa, ha az x_0 foka kisebb, mint 4). A skatulya-elv miatt a négy fa közül valamelyiknek legalább $\frac{1}{4}(|T| - 1)$ éle van. Feltehetjük, hogy ez a fa T_1 és legyen x_1 az a csúcsa T_1-nek, ami szomszédos x_0-lal. Az indirekt feltevés miatt $|T_1| > |T| - \frac{1}{4}(|T| - 1) = \frac{3}{4}(|T| - 1) + 1$. Hasonló módon az x_1-nek van legfeljebb 3 db x_0-tól különböző szomszédja. Az x_1-et elvéve megint kapunk 4 fát, az x_0-tól különböző szomszédok által meghatározott fák legyenek T'_1, T'_2, T'_3. Ennek a három fának összesen legalább $\frac{3}{4}(|T| - 1)$ csúcsa van. A skatulya-elv miatt az egyiknek legalább $\frac{1}{4}(|T| - 1)$ csúcsa van, feltehetjük, hogy T'_1-nek. Az indirekt feltevés miatt megint $|T'_1| > \frac{3}{4}(|T| - 1) + 1$. Legyen x_2 az a csúcsa T'_1-nek, ami szomszédos x_1-gyel, ekkor $x_2 \neq x_0$. Ezt az eljárást iterálva kapunk egy x_n sorozatot, amire $x_{n+2} \neq x_n$ teljesül minden n-re. Mivel T fa, ezért egy végtelen sorozatot kapunk, ami ellentmondás.

(2 pont)

Megmutatjuk, hogy az ennek az élnek megfelelő szomszédos négyzetpár épp olyan amit keresünk. Legyen e egy olyan e éle a T-nek, amit elvéve a kapott T_1, T_2 fákra $|T_1|, |T_2| \geq \frac{1}{4}(|T| - 1) = \frac{m^2-1}{2}$ teljesül. Legyen v_1^e és v_2^e azon négyzetek középpontjai, melyre $v_1^e v_2^e$ merőlegesen metszi e-t és egység hosszú. Ekkor $S \cup v_1^e v_2^e$ két séta, S_1^e és S_2^e uniója, melyekre $S_1^e \cap S_2^e = v_1^e v_2^e$. Hasonló módon bizonyítva, mint S-re és T-re kapjuk, hogy $2|T_i| = |S_i^e| - 2$ $(i = 1, 2)$. Vagyis $|S_1^e|, |S_2^e| \geq m^2 + 1$. Ekkor $S = (S_1^e - v_1^e v_2^e) \cup (S_2^e - v_1^e v_2^e)$, ez a két halmaz diszjunkt és $|S_i^e - v_1^e v_2^e| \geq m^2 = n^2/4$, tehát készen vagyunk.

(1 pont)

Megjegyzések

Egy ehhez hasonló kombinatorika feladatnál kulcskérdés, hogy j**ó diagramot rajzoljunk**, és a **lényegi észrevételeket** megtegyük. Jópáran sajnos ezt nem egészítették ki bizonyítással. A bizonyításnak ráadásul nem elég egy ábrára hivatkoznia: fontos megmutatni, hogy **miért úgy nézhet ki** "lényegében" az ábra, hogy a kiolvasott tulajdonság mindig teljesül.