Kombi problémamegoldó és kutatószeminárium

Reguláris gráfok, 1-faktorok, d-faktorok

2019. Ápr. 4.

Tanultunk 1-faktor (Teljes párosítás) létezéséről szükséges és elégséges feltételeket. Ehhez kapcsolódó kitekintési irányokra nézünk rá ezen a héten.

1) (a) Konstruálj olyan G gráfot, amelyben egyetlen 1-faktor van, ugyanakkor $d_{min} > k$ (egy előre rögzített k esetén).
(b) Lássuk be, hogy biztosan lesz G-ben elvágó él, amennyiben G-ben pontosan egy 1-faktor van.
(c) Igazoljuk, hogy ha $|V(G)| = n$, akkor $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}$, amennyiben G-ben pontosan egy 1-faktor van.

2) G összefüggő, $2d$-reguláris, és élszáma páros. Igazoljuk, hogy G 2 db d-faktor uniója.

3) G összefüggő, $2d$-reguláris, és élszáma páros. Igazoljuk, hogy G d db 2-faktor uniója.

4*) Tudunk-e általánosabb állítást megfogalmazni: ab-reguláris gráf a-reguláris gráfokra való felbontásairól?

5) Igaz-e, hogy minden G gráfban van olyan F részgráf, melyre $|d_F(v) - \frac{d_G(v)}{2}| < 1$ minden $v \in V(G)$ csúcsra?

6) G-ben most nem 1-faktor létezését, hanem k-faktor létezését vizsgáljuk, $k \in \mathbb{N}$. Konstruáljunk G-ből egy olyan G^* gráfot, amely pont akkoor tartalmaz 1-faktort, ha G-ben van k-faktor.

Kőnig élszínezési tétele (spec. formában) igazolta, hogy $K_{n,n}$ élei n különböző színű 1-faktorra bonthatóak. Az ilyen 1-faktorizációk leírhatóak az ú.n. Latin négyzetek segítségével: amelynek soraiban és oszlopaiban n különböző elem (szimbólum) szerepel oly módon, hogy ezek mindegyike minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer fordul elő. Ilyesmi előállításához kedvenc algebrai struktúráink segíthetnek, a csoportok; Cayley-táblájukkal. Ám a csoport definíciójából tkp az asszociativitás nem is szükséges. (ha elhagyjuk, a kvázicsoportok körét kapjuk meg).

7) Tekintsük a $\mathbb{Z}_n^+$ Cayley-tábláját; mint Latin négyzetet; ill. az ehhez tartozó $K_{n,n}$-beli színezett 1-faktorizációt. Igazoljuk, hogy sehogyan sem tudunk kiválasztni olyan 1-faktort amelynek minden éle különböző színű, amennyiben n páros.

Érdekesség: ha egy csoporthoz tartozó Latin négyzetben, vagyis $K_{n,n}$-beli színezett 1-faktorizációból választható egy színes (rainbow) 1-faktor, akkor fel is bontható színes 1-faktorok diszjunkt uniójára.

8) Igazoljuk, hogy ha $n \leq 4$, akkor minden Latin négyzet megkapható egy n-rendű csoport Cayley-táblájából, sorok, oszlopok és szimbólumok permutációját követően. Lássuk be, hogy ez $n = 5$-re már nem igaz.