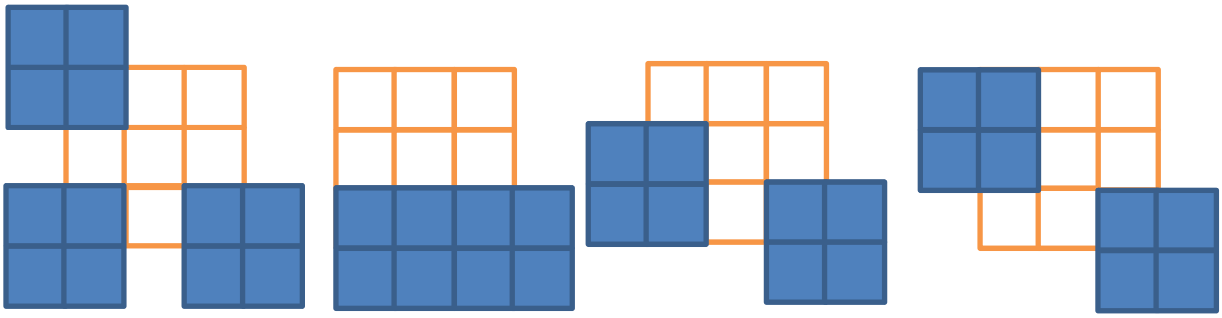
2015 júliusi (kombinatorika) feladatsor megoldása

1. Egy 6nx6n-es táblára két játékos felváltva 2x2-es négyzeteket rak, melyek nem fedik egymást. Az veszít, aki már nem tud lépni.
a) Legalább hány lépés után fejeződhet be a játék?
b) Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?

Megoldás:

1. a) Vankó Mila:

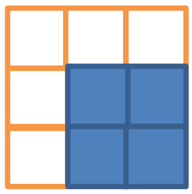
Egy 3x3-as négyzetet 2x2-es négyzetekkel csak úgy lehet lefedni, ha legalább 4 1x1-es négyzetet lefed benne. Ha csak 3 1x1-es négyzetet fedne le, akkor az csak úgy lehetne, hogy a középső négyzet üresen marad, és vagy 3 sarkot, vagy két sarkot és még egy, valamelyikkel szomszédos oldalú négyzetet fed le:

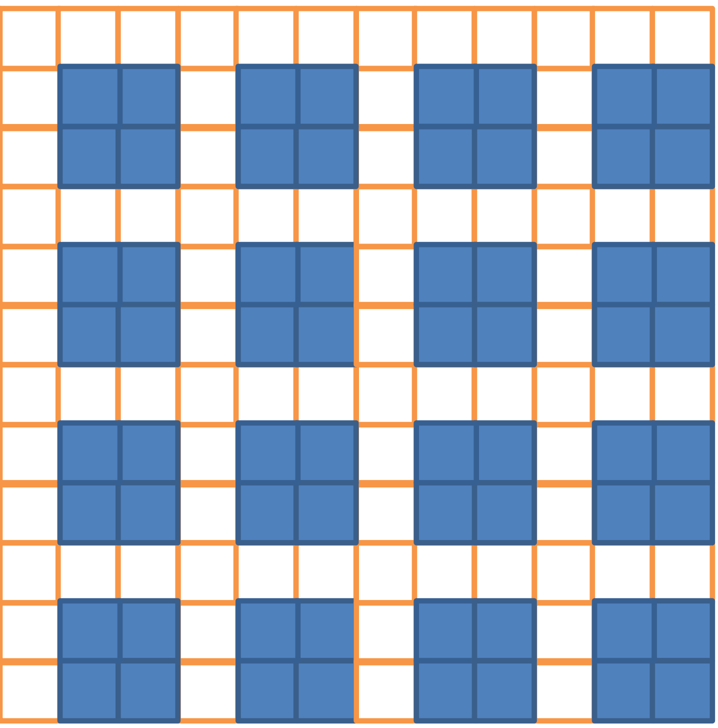


Ekkor azonban mindig le lehet rakni még egy 2x2-es négyzetet. Tehát legalább 1 2x2-es négyzet kell egy 3x3-as négyzetbe. Így egy 6x6-os négyzetbe minimum 4 2x2-es négyzet kell (6x6=4(3x3)).

Tehát egy 6nx6n-es négyzetbe be, azaz n^2 6x6-os négyzetbe $n^2 \cdot 4 = 4n^2$ 2x2-es kell legalább, különben lesz legalább egy 3x3-as négyzet, amiben lesz még hely egy 2x2-es négyzetnek.

$4n^2$ 2x2-es négyzet mindig elég is, ha ilyen 3x3-as négyzeteket teszünk egymás mellé:





1. a) Andó Angelika

Az ábrán látható módon, ha a játékosok minden 3x3-as négyzet jobb alsó sarkába raknak egy-egy 2x2-es négyzetet, akkor $(6n \cdot 6n):9 = 4n^2$ db 2x2-es négyzet lerakása után fejeződik be a játék.

Ha ennél kevesebb négyzetet raknak le, akkor még biztos le lehet tenni legalább egy darab 2x2-es négyzetet.

Tekintsük az ábrán lerakott 2x2-es négyzeteket egy színezésként. Minden négyzet pontosan egy színezett 2x2-es négyzetbe metsz bele, ezért ha már $4n^2 - 1$ db négyzetet leraktunk, még biztosan lesz legalább egy színezett rész, ami még üres, így ide le tudjuk rakni a $(4n^2)$. 2x2-es négyzetet.

Tehát legalább $4n^2$ lépésben fejeződik be a játék, és létezik olyan játék, ami pontosan ennyi lépésben fejeződik be.

1. b) Lajos Hanka

   A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

   Úgy kezd, hogy leteszi az origó középpontú négyzetet (az origó az a pontja a táblának, ami minden oldaltól 3n távolságra van). Ezután „utánozza” a másikat: a másik által letett négyzet origóra vett tükörképére teszi le ő a négyzetet.

   Ez azt jelenti, hogy ha a másik tudott lépni, akkor ő is tud, mert kezdő játékos lépései után minden mezőre és origóra vett tükörképére igaz, hogy vagy mind a kettő le van fedve, vagy egyik sincs.

   Továbbá a játék legfeljebb $9n^2$ lépésben véget ér, tehát valakinek mindig nyer.

   Tehát a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

1.

2. Egy n lakosú városban klubokat szerveznek úgy, hogy bármely két klubnak legyen, és bármely három klubnak már ne legyen közös tagja. Legfeljebb hány klubot lehet így szervezni?

   Megoldás [Vankó Mila]:

   Semelyik 3 klubnak nem lehet közös tagja, tehát minden ember legfeljebb 2 klubnak lehet tagja. x klub esetén minden klubnak legalább $x-1$ tagja kell, hogy legyen, mert mindegyik tag legfeljebb egy másik klubnak lehet a tagja (hiszen összesen két klubnak lehet a tagja). Mivel mindenki legfeljebb 2 klubban van, ezért ehhez x klub esetén legalább $\frac{x(x-1)}{2}$ ember kell. $\frac{x(x-1)}{2}$ ember esetén meg is lehet szervezni x klubbot, ha mindegyik emberhez két különböző klubbot rendelünk (A és B) és semelyik két emberhez sem ugyanazt a kettőt.(Ilyen A-B párból $\frac{x(x-1)}{2}$ van.) Így minden n-hez keressük a legnagyobb olyan x pozitív egészet, amire $\frac{x(x-1)}{2} \leq n$. Minden n-re van egy olyan pozitív valós a, amire $n = \frac{a(a-1)}{2}$ $a = \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}$. Tekintsük a alsó egészrészét, legyen ez k, arra biztosan igaz lesz, hogy $\frac{k(k-1)}{2} \leq n$, mert ez már a-ra is igaz, és $k \leq a$ és az $\frac{x(x-1)}{2}$ függvény monoton nő, ha $x \geq 1$. Olyan k-nál nagyobb l egész pedig nincs, amire igaz, hogy $\frac{l(l-1)}{2}$, szintén a monoton növés miatt, mert a volt az $\frac{x(x-1)}{2} = n$ egyenlet nagyobb gyöke, tehát ha $l \geq k$ egész, akkor $l > a$ és ez ellentmondás. Tehát legfeljebb $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$ klubbot lehet szervezni egy n lakosú városban.

   (A konstrukció a leírt, az alsóegészrész miatt megmaradó embereket tetszőlegesen $0, 1$ vagy 2 klubba beoszthatjuk.)

3. Egy kör alakú asztal körül $2n$-en ülnek. Hányféleképpen alkothatnak az asztal körül ülők n párt úgy, hogy az egy párban ülők kezet foghassanak anélkül, hogy egy másik kezet fogó pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (A kézfogás a párt összekötő szakasz vonalában történik az asztal felett.)

3. feladat: Glattfelder Hanna

Rekurzívan megnéztem a feladatot n=1,2,3,4 és 5-re és azt kaptam, hogy n=5-ig a lehetséges kézfogások száma a Catalan-számokat adja ki.

A feladat tulajdonképpen a Dyck-szavas feladat egy átfogalmazása. (*Itt olvashattok a Dyck-szavakról:* https://hu.wikipedia.org/wiki/Catalan-sz%C3%A1mok) Jelöljünk ki egy első embert, majd lépkedjünk tőle kezdve mondjuk negatív forgásirányba! Ha egy olyan emberrel találkozunk, akinek az addigi emberek között nem volt párja, egy X-et, ellenkező esetben egy Y-t írunk a papírra.

Így csupa Dyck-szót fogunk kapni, mivel az első k ember között nem lehet több olyan ember, akinek volt párja, mint akinek nem, hiszen ekkor egy ember több emberrel is kezet fogna. (Vagyis minden jó ültetéshez egy Dyck-szó tartozik)

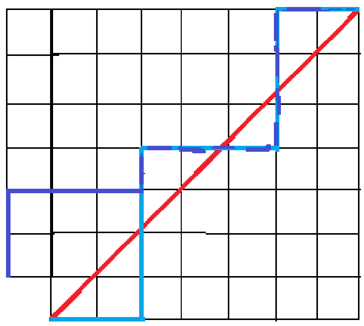
Egy Dyck-szóhoz pedig egyértelműen hozzárendelhető egy zárójelsor, ahol X=(és Y=). Egy zárójelsornál pedig egyértelmű, melyik zárójelek tartoznak össze. Az összetartozó zárójeleknek megfelelő párok (emberek) fognak kezet fogni. (például: XXYYXY=(())(), tehát az 1. és a 4., a 2. és a 3., valamint az 5. és a 6. ember alkot párt) (Vagyis minden Dyck-szóhoz egy jó ültetés tartozik)

Tehát minden 2n hosszú Dyck-szóhoz pontosan egy jó párosítás tartozik. 2n hosszú Dyck-szóból pedig C_n db van.

Tehát C_n féleképpen alkothatnak az asztalnál ülők n párt úgy, hogy az egy párban ülők kezet foghassanak anélkül, hogy egy másik pár keze fölött, vagy alatt át kelljen nyúlniuk.

Az n. Catalan-számot a következő módon számolhatjuk ki:
Van egy n*n-es négyzetünk. Hány féle képen mehetünk végig a négyzet rácsvonalain, ha a bal alsó sarokból indulunk, a jobb felső sarokba érkezünk és közben nem léphetünk át a bal alsó sarokból induló átlón?

Ennek a megoldása úgy néz ki, hogy minden "rossz úthoz" hozzárendelhető egy út az (n-1)*(n+1)-es téglalapon úgy, hogy a (0,1) (n-1,n) átlóra tükrözzük az út azon részét, amelynél még egyszer sem léptünk át az átlón. Ez egy kölcsönös megfeleltetés.



Az összes út száma: $\binom{2n}{n}$

Rossz utak száma: $\binom{2n}{n-1}$

Tehát a jó utak száma: $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$

Ez a feladat pedig ugyanaz, mint a Dyck-szavas feladat, mivel az egyiknél az autó y koordinátája nem lehet nagyobb egy kezdeti állapotban sem, mint az x koordinátája, a másiknál pedig a szó egyik kezdeti szakaszában sem lehet több az Y-ok száma, mint az X-eké.

Tehát az emberek az asztal felett $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!\cdot(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}$

féleképpen foghatnak kezet.

4. Egy téglatest alakú ládát olyan egybevágó téglákkal akarunk megtölteni, amelyek éleinek aránya 1 : 2 : 4. Bizonyítsuk be, hogy ez csak akkor lehetséges, ha a láda úgyis megtölthető, amikor az ugyanolyan hosszú téglaélek mind párhuzamosak.

   Megoldás [Baran Zsuzsanna]:

   Legyen az egység a téglák legrövidebb élének a hossza. Ekkor egy tégla térfogata 8 (köb)egység. Ha a téglatest alakú láda megtölthető ilyen téglákkal, akkor az éleinek hosszai egész számok kell legyenek és a térfogata (az élek szorzata) osztható kell legyen 8-cal. A láda akkor tölthető meg egyforma állású téglákkal, ha valamelyik élének hossza osztható 4-gyel, egy másik élének hossza pedig osztható 2-vel. Tegyük fel, hogy a láda egyik élének hossza sem osztható 4-gyel, mégis kitölthető valahogyan téglákkal. Az élek szorzata osztható 8-cal, ezért mindegyik páros kell legyen, viszont a szorzat nem osztható 16-tal, ezért a kitöltéshez használt téglák száma páratlan kell legyen. A kitöltéshez használt téglákat osszuk 3 csoportba aszerint, hogy a 4 hosszúságú élük a ládának melyik élével párhuzamos. Mivel összesen páratlan sok tégla van, valamelyik csoportba páratlan sok kell jusson. Jelölje az ezt a csoportot H, jelölje a ládának azt az élét, ami ezeknek a tégláknak a 4 hosszú élével párhuzamos a és jelölje a láda másik két élének a hosszát b és c.

   A ládát állítsuk fel úgy, hogy az a hosszú éle függőleges legyen és a H-beli téglákat csoportosítsuk aszerint, hogy az "felső" lapjuk hány egységre van a láda aljától. Mivel összesen páratlan sok H-beli tégla van, valamelyik csoportba páratlan sok téglának kell esnie. Tekintsük a legfelső ilyen csoportot, ezek felső lapjának magasságát jelölje h és képzeletben metsszük el a ládát egy vízszintes síkkal $h - 1/2$ egység magasságban. A láda keresztmetszete egy $b \times c$ méret? téglalap lesz, amit a téglák keresztmet- szetei 1×2-es, 1×4-es illetve 2×4-es téglalapokra osztanak. Csak a H-beli tégláknak lesz 1×2-es téglalap a keresztmetszete és csak olyan H-beli téglákat metszettünk el, amiknek a felső lapja h vagy $h+1$ vagy $h+2$ vagy $h+3$ magasságban van. Az előbbi típusból páratlan sok darab van, az utóbbi háromból pedig páros (lehet, hogy 0). Ezek szerint a keresztmetszetben páratlan sok 1×2-es négyzet szerepel, így az 1×2-es téglalapok által lefedett rész területe 4-gyel osztva 2 maradékot ad. A keresztmetszetben lévő 1×4-es és 2×4-es téglalapok által lefedett rész területe viszont 4-gyel osztható, így a teljes lefedett rész területe 4-gyel osztva 2 maradékot kell adjon. Pedig a teljes lefedett rész egy $b \times c$ méret? téglalap, aminek a területe osztható 4-gyel, hiszen b és c is páros. Ez ellentmondás. Ezek szerint a láda valamelyik élének hossza osztható 4-gyel. Jelölje ezt az élet a, a másik kettőt pedig b és c. Tekintsük a ládának azt a lapját, aminek oldalai b és c. Ha ránézünk erre a lapra, látjuk, hogy a tégláknak az ide eső lapjai kisebb téglalapokra osztják fel: 1×2-es, 1×4-es illetve 2×4-es téglalapokra. Ezek összterülete páros, ezért a $b \times c$ téglalap területe is páros kell legyen, azaz b vagy c páros. Azaz a ládának van 4-gyel osztható és egy másik 2-vel osztható hosszúságú éle, így megtölthető egyállású téglákkal.

5. Egy körvonal mentén van n állomás, rajtuk néhány autó (egy állomáson több autó is lehet). Egy lépésben kiválasztunk egy tetsz őleges olyan állomást, melyen legalább két jármű van, és onnan egy autót eggyel balra, egyet pedig eggyel jobbra helyezünk át. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is teszünk le $n - 1$ autót,

   a, sosem tudunk végtelen sokáig lépkedni,

   b, rögzített autókiosztás esetén a végállapot nem függ attól, hogy mikor melyik állomást választjuk.

Megoldás [Almási Nóra]:

Nézzük úgy a feladatot, hogy egy körvonal n részre van osztva, az egyes beosztásokon pontok vannak, összesen $n-1$ db. Először belátom, hogy ha jól játszunk, be lehet fejezni a játékot. Ha van egy lánc, aminek tagjai pozitív számok és van egynél nagyobb (tehát lehet lépni), akkor a láncban lépünk a min. 2-es értékkel, majd mindkét irányba amíg lehet, lépünk 1-et sorban a helyeken; ekkor azt érjük el, hogy a lánc két vége "leszakad" a láncról. (Pl. 0 0 1 2 1 2 1 0 0 láncból lesz 0 1 0 2 1 2 0 1 0 lánc.) Tehát tetszőleges pozitív egészekből álló lánctól eggyel el lehet távolítani a két végét, ha kezdetben nem csak egyesekből állt. Ha van 1-nél nagyobb szám a körön, akkor van min. 2 db 0 is (mert $n-1$ a körön lévő n természetes szám összege). Nézzünk 2 db 0 között lévő folytonos láncot, és válasszuk le a két végét. A célunk száma az, hogy a 0-k száma csökkenjen. Ha a két átadó helyen 1 volt, most két 0 lett, így azok száma nem csökkent, de távolságuk igen. Csökkentsük a távolságot amíg lehet, vagy amíg a 0-k száma nem csökken (1-gyel vagy 2-vel). Ha folyamatosan a távolság csökken, előfordulhat, hogy a lánc egytagú lesz, ekkor lépünk egyet (0 2 0-ból 1 0 1 lesz, 0 3 0-ból 1 1 1), így csökken a 0-k száma. Ezután a folyamatot kezdjük elölről; amíg van 2-es (ezért van 2db 0), nem hagyjuk abba, végül 1 db 0 és n-1 db 1 lesz. A 0-k száma folyamatosan csökken, ez mutatja, hogy a lépések egyszer véget érnek. Bemutatom egy konkrét láncra a lépéssort: 01121310 10121301 11021211 A 0-k száma csökkent, a lépéssor véges lett. Nevezzük el L-nek a lépéssort, ami ilyen módon kihozza az 1db 0-s állást. Tehát elérhető, hogy véget érjen a játék. Tegyük fel, hogy lehet végtelen a játék. Ekkor van olyan mező, amiről végtelen sokszor lépünk. Ekkor ennek szomszédjairól is végtelen sokszor lépünk (különben folyamatosan nőne az értékük, előbb-utóbb elérné az n-et, ami nem lehet, mert $n-1$ pont van); ezek szomszédjairól is;...; az összes mezőről végtelen sokat lépünk. Egy lépés kimenetele nem függ attól, hogy mi történt utána, következményeként a mező értéke (pontjai száma) 2-val csökken, szomszédjai 1-1-gyel nőnek. Emiatt egy lépéssor lépései tetszőlegesen átrendezhetők, annyira kell figyelni, hogy minden lépésnél kell lenni 2 korongnak az adott mezőn. Ekkor a feltételezett végtelen lépéssorban bármit előrébb lehet hozni, csak olyan helyre kell beszúrni, hogy az adott pillanatban legyen 2 pont a mezőn. Ekkor hozzuk úgy előre a lépéseket, hogy a végtelen sorozat az L lépéssorral kezdődjön! [L első lépésétől kezdve sorban cseréljük az elejére a lépéseket.] A végtelen lépéssor ugyanazokból az elemekből áll, minden lépéskor van min. 2 az adott mezőn, így nem áll meg a játék.

Azonban az L lépéssor lefutása után sehol nincs 2 pont, nem lehet lépni, így véget ér a játék - ez ellentmondáshoz vezet, az indirekt feltevés hamis volt, nincs olyan lépéssor, amivel a végtelenségig lehet játszani.

A b, rész az imént a végesség bizonyításához használt cserélgetéshez hasonlóan látható be.