

## EGMO számelmélet

1. Legyen  $k > 1$  rögzített egész szám. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok  $n$  pozitív egész van, amire:

$$n | 1^n + 2^n + \dots + k^n$$

2. Egy klub  $n$  tagját az  $1, 2, \dots, n$  számokkal számoztuk.

A tagok időről időre ajándékokat adnak egymásnak, olyan tárgyakat is, amiket korábban ők kaptak más tagoktól. Hogy elkerüljék azt a kellemetlen helyzetet, hogy valaki olyat kap, amit korábban adott, a következő szabály hozták:

”Egy  $a$  számú ember akkor és csak akkor küldhet ajándékot egy  $b$  számú embernek, ha  $a(b-1)$  többszöröse  $n$ -nek.”

Bizonyítsd be, hogy így senki nem kapja majd vissza az ajándékokat, amiket küld.

3. Add meg azon  $(p, q, r)$  rendezett, prímekből álló hármassokat, amikre  $p|q^r + 1$ ,  $q|r^p + 1$ , és  $r|p^q + 1$ .

4. Bizonyítsd be, hogy az  $(1, 2, \dots, 2k)$  számokat be lehet párosítani diszjunkt párokba, hogy a párok összege prím legyen.

5. Bizonyítsd be, hogy pozitív egész  $a, b, c$  számokra

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3(ab + bc + ca)}$$

nem lehet egész.

## EGMO számelmélet

1. Legyen  $k > 1$  rögzített egész szám. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok  $n$  pozitív egész van, amire:

$$n | 1^n + 2^n + \dots + k^n$$

2. Egy klub  $n$  tagját az  $1, 2, \dots, n$  számokkal számoztuk.

A tagok időről időre ajándékokat adnak egymásnak, olyan tárgyakat is, amiket korábban ők kaptak más tagoktól. Hogy elkerüljék azt a kellemetlen helyzetet, hogy valaki olyat kap, amit korábban adott, a következő szabály hozták:

”Egy  $a$  számú ember akkor és csak akkor küldhet ajándékot egy  $b$  számú embernek, ha  $a(b-1)$  többszöröse  $n$ -nek.”

Bizonyítsd be, hogy így senki nem kapja majd vissza az ajándékokat, amiket küld.

3. Add meg azon  $(p, q, r)$  rendezett, prímekből álló hármassokat, amikre  $p|q^r + 1$ ,  $q|r^p + 1$ , és  $r|p^q + 1$ .

4. Bizonyítsd be, hogy az  $(1, 2, \dots, 2k)$  számokat be lehet párosítani diszjunkt párokba, hogy a párok összege prím legyen.

5. Bizonyítsd be, hogy pozitív egész  $a, b, c$  számokra

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3(ab + bc + ca)}$$

nem lehet egész.