Mila - Kombinatorika

Kettős leszámlálás

1. Egy iskolában 2007 lány és 2007 fiú van. Minden diák legfeljebb 100 klubnak tagja. Tudjuk, hogy bármely két különböző nemű diák legalább egy közös klubnak tagja. Lásd be, hogy van egy klub aminek legalább 11 lány és 11 fiú tagja van. (China Hong Kong MO 2007)

2. Egy versenyen m versenyző és n bíró van, ahol $n \geq 3$ és páratlan. Minden egyes bíró minden versenyzőt vagy átenged vagy megbuktat. Legyen k az a szám, amire igaz, hogy bármely két bíró ítélete legfeljebb k versenyző esetén egyezik meg. Lássuk be, hogy $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$ (IMO 1998)

3. Legyenek $x_1, x_2, ..., x_n$ és $y_1, y_2, ..., y_n$ valós számok. Legyen $A = \{a_{ij}\}$ (ahol $1 \leq i, j \leq n$) egy $n \times n$-es mátrix, amire

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } x_i + y_j \geq 0 \\ 1, & \text{if } x_i + y_j < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Legyen B egy $n \times n$-es mátrix, melynek minden eleme 1 vagy 0, úgy, hogy az tagok összege B minden sorában és oszlopában ugyanannyi, mintA ugyanazon sorában illetve ugyanazon oszlopában. Bizonyítsd be, hogy $A = B$. (IMO SL 2003)

Invariánsok

1. Van 2^m db papírlapunk, kezdetben mindegyikre egy 1-es van írva. Egy lépésben kiválasztunk két különböző lapot, összeadjuk a rajtuk lévő számokat, és mindkét lapról kitöröljük az eredeti számot, és ráírjuk az összeget (tehát ha a és b volt a lapokon, akkor a lépés után mindkettőn a+b lesz). Bizonyítsd be, hogy $m2^{m-1}$ lépés után a lapokon lévő számok összege minimum 4^m lesz.

2. Van sorban 2017 kártya, mindegyiknek egyik oldala piros, a másik fehér. Eredetileg mindegyik kártya a piros felével felfelé van. Két játékos felváltva lép, egy lépésben kiválasztanak 50 szomszédos kártyát, melyek közül a bal szélső piros és mindegyiket megfordítják. Az nyer, aki utolsónak tud lépni.

a) Mindenképpen véget ér-e a játék?

b) Van-e a kezdő játékosnak nyerő stratégiája?

(IMO SL 2009)

3. Egy szabályos ötszög minden csúcsában áll egy-egy 2 literes vödör. Hamupipőke és és a gonosz mostohaanyja a következőt játsszák: Először a mostohaanya hoz 1 liter vizet a folyóból és tetszése szerint elosztja azt az 5 vödör között. Ezután Hamupipőke kiválaszt két szomszédos vödröt és azok tartalmát kiönti a folyóba, majd a vödröket visszateszi a helyükre. Ezután újra a mostohaanya következik, és így tovább. A mostohaanya célja, hogy valamelyik vödör túlcsorduljon, míg Hamupipőkéé az, hogy ezt megakadályozza. Elérheti a mostohaanya a célját? (IMO SL 2009)

Bijekciók

1. Vegyünk egy n oldalhosszúságú szabályos háromszöget, ezt osszuk fel n^2 db 1 oldalhosszúságú háromszögre, így kapunk egy háromszögrácsot. Hány olyan paralelogramma van ezen a rácson, amelynek az oldalai rácsvonalak?

2. Vegyünk egy n elemű $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bináris sorozatot (azaz minden elem 1 vagy 0). Legyen a_n azon n hosszú bináris sorozatok száma, melyek nem tartalmazzák a 0,1,0 részsorozatot. Legyen b_n azon n hosszú bináris sorozatok száma, melyek nem tartalmazzák a 0,0,1,1 és 1,1,0,0 részsorozatotok egyikét sem. Bizonyítsd be, hogy $b_{n+1} = 2a_n$ minden pozitív egész n-re. (USAMO 1996)

3. Legyen n egy pozitív egész. Egy n darab (nem feltétlen különböző) pozitív egészből álló sorozatot teljesnek nevezünk, ha teljesül rá a következő: minden pozitív egész $k \geq 2$ esetén ha k szerepel a sorozatban, akkor k-1 is, valamint k-1 első előfordulása hamarabb lesz, mint k utolsó előrfordulása. Bizonyítsd be, hogy minden n-re n! teljes sorozat van (IMO SL 2002)