Kombinatorika szeminárium

2019. december 4.

Nagy Dániel nagydani@renyi.hu

Jelölések: $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, $2^{[n]} := \{F \mid F \subseteq [n]\}$

1. A [8] alaphalmaznak szeretnénk minél több 4 elemű részhalmazát kiválasztani úgy, hogy bármely kettőnek legalább 2 közös eleme legyen. Gyorsan adódik az ötlet (főleg, ha az Erdős-Ko-Rado tételt is ismerjük): vegyük az összes halmazt két rögzített elemen át, ez összesen 15. Elérhető-e a 15 más konstrukcióval? Elérhető-e több?

2. Egy halmazrendszert leszálló rendszernek nevezünk, ha tartalmazza minden tagjának minden részhalmazát. Bizonyítsd be, hogy ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ leszállóak, akkor $2^n|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \geq |\mathcal{A}||\mathcal{B}|$.

3. Egy $\mathcal{F} \subset 2^{[2019]}$ halmazrendszerre igaz, hogy bármely két elem uniója metszi bármely két másik elem unióját. Legfeljebb mekkora lehet $|\mathcal{F}|$?

4. Azt mondjuk, hogy két halmaz összemérhető, ha az egyik részhalmaza a másiknak. A $\mathcal{F} \subset 2^{[2019]}$ halmazrendszer minden eleme legfeljebb egy másikkal összemérhető. Következik-e ebből $|\mathcal{F}| \leq \binom{2019}{1009}$?

5. Egy halmazrendszert metsző rendszernek nevezünk, ha bármely két tagja metszi egymást. Bizonyítsd be, hogy ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ metszők, akkor $|\mathcal{F} \cup \mathcal{G}| \leq 2^n - 2^{n-2}$.

6. Egy halmazrendszert napraforgónak nevezünk, ha bármely két tagjának metszete ugyanaz a halmaz. Legfeljebb hány tagja lehet egy k méretű halmazokból álló rendszernek, ha nincs benne r halmaz, ami napraforgót alkot? Adj bármilyen felső korlátot k és r függvényében.

7. Egy $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ halmazrendszerben nincs négy olyan különböző halmaz, amire $A \cup B \subseteq C \cap D$ teljesül. Legfeljebb hány olyan (X, Y, Z) hármas lehet $\mathcal{F}$-ben, amire teljesül $X \subset Y \subset Z$?

Kombinatorika szeminárium megoldások

2019. december 4.

Nagy Dániel   nagydani@renyi.hu

1. Vegyük 6 rögzített elemen át az összes 4 elemű halmazt, ez is 15 darab és jó. 17 is elérhető, ha azokat vesszük, amik 4 rögzített elem közül legalább 3-at tartalmaznak.

   Ahlswede és Khachatrian tétele szerint $2^{[n]}$ legnagyobb k-uniform ℓ metsző rendszerét a következő konstrukciók egyike adja: $\{F \in [n] \mid |F| = k,\ F \cap [\ell + 2i] \geq \ell + i\}, \quad 0 \leq i \leq (n - \ell)/2.$

2. Használjunk n szerinti indukciót, $n = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló. Legyen most $n \geq 2$, és legyenek $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ leszállóak. Legyen $\mathcal{A}^- := \{S \in \mathcal{A} \mid n \notin S\}$ és $\mathcal{A}^+ := \{S \backslash \{n\} \mid n \in S \in \mathcal{A}\}$. Ekkor $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^-| + |\mathcal{A}^+|$ és a leszálló tulajdonság miatt mindkét új halmazrendszer leszálló, továbbá $\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{A}^- \subseteq 2^{[n-1]}$. Ugyanígy definiáljuk $\mathcal{B}^-$-t és $\mathcal{B}^+$-t.

   Alkalmazzuk az indukciós feltételt az $\mathcal{A}^-$ és $\mathcal{B}^-$ illetve az $\mathcal{A}^+$ és $\mathcal{B}^+$ halmazrendszerekre, és adjuk össze két egyenlőtlenséget:

   $$2^{n-1}|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| = 2^{n-1}|\mathcal{A}^- \cap \mathcal{B}^-| + 2^{n-1}|\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}^+| \geq |\mathcal{A}^-||\mathcal{B}^-| + |\mathcal{A}^+||\mathcal{B}^+|$$

   Mivel $|\mathcal{A}^+| \leq |\mathcal{A}^-|$ és $|\mathcal{B}^+| \leq |\mathcal{B}^-|$, teljesül $|\mathcal{A}^-||\mathcal{B}^-| + |\mathcal{A}^+||\mathcal{B}^+| \geq |\mathcal{A}^-||\mathcal{B}^+| + |\mathcal{A}^+||\mathcal{B}^-|$.

   $$2^n|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \geq 2|\mathcal{A}^-||\mathcal{B}^-| + 2|\mathcal{A}^+||\mathcal{B}^+| \geq |\mathcal{A}^-||\mathcal{B}^-| + |\mathcal{A}^+||\mathcal{B}^+| + |\mathcal{A}^-||\mathcal{B}^+| + |\mathcal{A}^+||\mathcal{B}^-| =$$
   $$= (|\mathcal{A}^-| + |\mathcal{A}^+|)(|\mathcal{B}^-| + |\mathcal{B}^+|) = |\mathcal{A}||\mathcal{B}|$$

3. Konstrukció: Az $\mathcal{F} = \{F \subseteq [2019] \mid |F| \geq 1009\}$ halmazrendszer megfelel, a mérete $2^{2018} + \binom{2019}{1009}$.

   1. bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ teljesíti a feladat feltételét. Használjuk az $\overline{A} := [2019] \backslash A$ jelölést. Legyen $\mathcal{G} := \{F \in \mathcal{F} \mid \overline{F} \in \mathcal{F}\}$. Ha $\mathcal{G}$-ben lenne három halmaz amire igaz $X \subset Y \subset Z$, akkor az $X,\ Y,\ \overline{Y},\ \overline{Z} \in \mathcal{G}$ halmazokra teljesülne $(X \cup Y) \cap (\overline{Y} \cup \overline{Z}) = Y \cap \overline{Y} = \emptyset$, ami ellentmond a feltételünknek. Így $\mathcal{G}$ minden eleme tartalmazásra nézve minimális vagy maximális. A minimális illetve maximális elemek egy-egy antiláncot alkotnak, így Sperner tétele szerint $|\mathcal{G}| \leq 2\binom{2019}{1009}$. Innen $|\mathcal{F}| \leq (2^{2019} + |\mathcal{G}|)/2 = 2^{2018} + \binom{2019}{1009}$.

   2. bizonyítás: Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ felszálló rendszer. (Ha $A \subset B$, $A \in \mathcal{F}$ és $B \notin \mathcal{F}$, cseréljük A-t B-re.) Ha $F \cap G = \emptyset$ és $|F| + |G| = 2017$, akkor nem lehetnek mindketten $\mathcal{F}$-ben. Legyen ugyanis $[2019] \backslash (F \cup G) = \{x, y\}$. Ekkor $F' = F \cup \{x\}$ és $G' = G \cup \{y\}$ is $\mathcal{F}$-beliek és $(F \cup F') \cap (G \cup G') = F' \cap G' = \emptyset$.

   Minden $0 \leq i \leq 1008$ esetén tekintsük azt a páros gráfot, aminek a csúcsai az i illetve $2017 - i$ elemű részhalmazok és a diszjunktak vannak összekötve. Ez egy osztályonként reguláris gráf, így az alsó (kisebb) csúcsosztály belepárosítható a felsőbe. Az összepárosított halmazok egyike biztosan kimarad $\mathcal{F}$-ből. Tehát összesen legalább $\sum_{i=0}^{1008} \binom{2019}{i}$ halmaz kimarad, így $|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1009}^{2019} \binom{2019}{i} = 2^{2018} + \binom{2019}{1009}$.

   A 3. feladat kérdése Körner Jánostól származik. Lásd még Katona-Nagy, *Union-intersecting set systems* (2015).

4. Legyen $\mathcal{F} = \{F \mid |F| = 1009,\ 1 \notin F\} \cup \{F \mid |F| = 1010,\ 1 \in F\}$. Ekkor $|\mathcal{F}| = 2\binom{2018}{1019} > \binom{2019}{1019}$.

   Páratlan méretű alaphalmaz esetén ez a legjobb konstrukció, míg páros esetén nincs jobb konstrukció, mint a triviális $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Lásd: Katona-Tarján, *Extremal problems with excluded subgraphs in the n-cube* (1981).

5. Mivel egy halmaz és a komplementere nem lehet egyszerre benne egy metsző rendszerben, $|\mathcal{F}|, |\mathcal{G}| \leq 2^{n-1}$. Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ tartalmazásra nézve maximális metsző halmazok, hiszen a bővítés csak növelné az uniójukat. Ekkor $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ felszálló rendszerek, $\mathcal{A} := 2^{[n]} \backslash \mathcal{F}$ és $\mathcal{B} := 2^{[n]} \backslash \mathcal{G}$ pedig leszállóak. A 2. feladat állítása szerint

$$|\mathcal{F} \cup \mathcal{G}| = 2^n - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq 2^n - 2^{-n}|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq 2^n - 2^{-n}\ 2^{n-1}\ 2^{n-1} = 2^n - 2^{n-2}.$$

   Forrás a 2. és az 5. feladathoz: Kleitman, *Families of non-disjoint subsets* (1966).

6. Belátjuk, hogy $|\mathcal{A}| \leq k!(r-1)^k$. Használjunk k szerinti indukciót, $k = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló. Legyen $k \geq 2$, $\mathcal{A}$ pedig egy k-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz r szirmú napraforgót. Legyen $\{A_1, A_2, \dots A_m\}$ páronként diszjunkt halmazok egy maximális rendszere $\mathcal{A}$-ban. Mivel a páronként diszjunkt halmazok napraforgót alkotnak, $m \leq r - 1$. Minden $x \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ elemre legyen $\mathcal{A}_x = \{S - \{x\} \bigm| S \in \mathcal{A},\ x \in S\}$. Ekkor mindegyik $\mathcal{A}_x$ egy $k-1$-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz r szirmú napraforgót. Az indukció szerint $|\mathcal{A}_x| \leq (k-1)!(r-1)^{k-1}$. Ekkor

$$|\mathcal{A}| \leq (k-1)!(r-1)^{k-1} \left| \bigcup_{i=1}^{m} A_i \right| \leq (k-1)!(r-1)^{k-1} \cdot k(r-1) = k!(r-1)^k.$$

   Forrás: Erdős-Rado, *Intersection theorems for systems of sets* (1960). A nagy kérdés az, hogy igaz-e $(c(r))^k$ alakú felső korlát. Lásd még Alweiss-Lovett-Wu-Zhang, *Improved bounds for the sunflower lemma* (2019+).

7. Legyen $\mathcal{G} := \{Y \in \mathcal{F} \mid \exists\ X, Z \in \mathcal{F},\ X \subset Y \subset Z\}$. Egy $Y \in \mathcal{G}$ egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó X-et és Z-t, mivel ha valamelyikből két lehetséges is lenne, előállna a tiltott négyes konfiguráció. Tehát pontosan $|\mathcal{G}|$ darab $X \subset Y \subset Z$ hármas van. Nincsenek olyan $Y_1, Y_2 \in \mathcal{G}$ halmazok, amikre $Y_1 \subset Y_2$, mivel ekkor $X_1 \cup Y_1 = Y_1 \subset Y_2 = Y_2 \cap Z_2$ teljesülne. Tehát $\mathcal{G}$ antilánc, így Sperner tétele szerint $|\mathcal{G}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

   Ez el is érhető. Álljon $\mathcal{F}$ az üres és a teli halmazból és az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű halmazból.

   A feladat megoldáshoz nem kellett, de igaz az, hogy egy $A \cup B \subseteq C \cap D$ négyes nélküli halmazrendszer mérete legfeljebb $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. Eredeti bizonyítás: De Bonis-Katona-Swanepoel, *Largest family without $A \cup B \subseteq C \cap D$* (2005). Egyszerűbb alternatív bizonyítások: Burcsi-Nagy, *The method of double chains for largest families with excluded subposets* (2013), Griggs-Li, *The partition method for poset-free families* (2013).

   A feladatban kitiltottunk egy tartalmazási struktúrát, és maximalizáltuk egy másik előfordulásainak számát. Ebben a témában lásd Gerbner-Keszegh-Patkós, *Generalized forbidden subposet problems* (2019+), illetve Gerbner-Methuku-Nagy-Patkós-Vizer, *On the number of containments in P-free families* (2019)