Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 1. feladatsor, megoldásvázlatok

Csúcs- és élszínezések

Definíció: Egy G gráf csúcsainak *jó csúcs-színezése* valahány színnel olyan, melyben nincs azonos színű pontokat összekötő él. Egy G gráf *kromatikus száma* $\chi(G)$ (ejtsd: khi, majdnem néma h-val) a legkisebb színszám, amellyel a csúcsait jól színezhetjük. Hasonlóan Egy G gráf éleinek *jó (él)-színezése* valahány színnel olyan, melyben nincs azonos színű élekre illeszkedő csúcs. Egy G gráf *élkromatikus száma vagy kromatikus indexe* $\chi'(G)$ a legkisebb színszám, amellyel a éleit jól színezhetjük.

Kapcsolódó tételek: Brooks, $\omega(G) \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$, Vizing

1. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 100\}$, és legyen $\{i, j\}$ él pontosan akkor, ha $1 \le |i-j| \le 6$. Mennyi $\chi(G)$ és $\chi'(G)$?

Megoldás Például az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ csúcsok egy K_7-et feszítenek, így $\chi(G) \ge 7$. Másrészt hét színnel periodikusan színezve (azaz a k színe legyen a héttel vett osztási maradéka, $1 \le k \le 100$) jó színezést kapunk, hiszen az azonos színű csúcsok különbsége osztható héttel, tehát legalább hét. Így $\chi(G) = 7$. A maximális fokszám $\Delta(G) = 12$, hiszen minden csúcsa a tőle $1, \ldots, 6$ távolságra levő csúcsokkal van összekötve balra is és jobbra is; így a $7 \le k \le 94$ csúcsok foka el is éri a tizenkettőt; tehát $\chi'(G) \ge 12$. Most nevezzük egy él hosszának a két végpontjának távolságát. A k hosszú éleket két színnel fogjuk színezni balról jobbra haladva (minden k-ra újabb két színt használunk): az első k élt az első színnel, a következő k élt a második színnel, majd ismét k élt az elsővel stb ($1 \le k \le 6$). Ez jó színezés 12 színnel, tehát $\chi'(G) \le 12$.

2. Legyen $H = \{1, 2, \ldots, 10\}$, V csúcshalmaz legyen H részhalmazainak halmaza, azaz $V = 2^H$, és legyen az élhalmaz $E = \{\{A, B\} \colon A \subsetneq B \text{ vagy } B \subsetneq A\}$, $G = (V, E)$. Mennyi $\chi(G)$?

Megoldás(**Megjegyzés:** jól értsük meg: a csúcsok H részhalmazai, tehát 2^{10} darab csúcs van; pl az $\{2, 4, 7\}$ szomszédos $\{2, 7\}$-tel, de nem szomszédos $\{1, 3, 4, 7\}$-tel.) A $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}, \ldots$, $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ csúcsok egy K_{11}-et feszítenek (bármelyik két kiválasztott részhalmaz közül a nagyobb elemszámú tartalmazza a kisebb elemszámút), így $\chi(G) \ge 11$. Másrészt a k elemszámú halmazokat a k. színnel színezve jó színezést kapunk 11 színnel (az elemszámok 0 és 10 között vannak), hiszen azonos elemszámú halmazok nem tartalmazhatják egymást.

3. Legyen G egyszerű, összefüggő, k-reguláris gráf: **a)** $k = 2$; **b)** $k = 3$. Igaz-e a) ill. b) esetben, hogy: G-ben van Hamilton-kör $\Leftrightarrow \chi'(G) = k$? Melyik implikációt tudjuk eldönteni?

Megoldás

a) $k = 2$: a 2-reguláris gráfok (minden csúcs foka kettő) néhány körből állnak; mivel G összefüggő, G egy kör. Ekkor mindenképpen van benne Hamilton-kör; az élkromatikus száma 2 vagy 3 aszerint, hogy páros vagy páratlan sok csúcsa van-e. Ezek alapján ($\Rightarrow$) nem igaz (pl C_5 ellenpélda); ($\Leftarrow$) viszont igaz implikáció (bár semmitmondó; de igaz azért, mert minden (a feltételeknek megfelelő) esetben, amikor $\chi'(G) = 2$, akkor G-ben kétségkívül Hamilton-kör).

b) $k = 3$: ($\Rightarrow$) feltettük, hogy G-ben van Hamilton-kör. Mivel a fokszámösszeg mindig páros, G-nek páros sok csúcsa van, tehát a Hamilton-kör élei színezhetők két színnel (piros, kék). Ekkor minden csúcsnál már két élt kiszíneztünk. A gráf maradék éleit színezzük lilára; ez jó színezés lesz, hiszen minden csúcsnál pontosan egy piros, egy kék és egy lila él lesz. Tehát valóban $\chi'(G) = 3$, az állítás (a $\Rightarrow$ irányú következtetés) helyes.

4. Legyen G egy 100-reguláris, 613 csúcsú, egyszerű gráf. Mennyi $\chi'(G)$?

5. Mennyi G kromatikus száma, ha G csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 100\}$, és $\{i, j\}$ $(i \ne j)$ pontosan akkor él, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$?

Párosítások

Definíció: Egy G gráf egy P élhalmazát *párosításnak* nevezzük, ha semely két P-beli élnek nincs közös végpontja. A P párosítás *lefedi* a csúcsok egy $A \subset V(G)$ részhalmazát, ha minden A-beli csúcsból indul P-beli él. Egy P párosítás *teljes*, ha minden csúcsból indul P-beli él.

Kapcsolódó tételek páros gráfokon: Hall (Hall-feltétel), Kőnig-Hall-Frobenius

6. Egy hattagú társaságban, ahol kölcsönösek az ismeretségek, mindenkinek három ismerőse van. Bizonyítsuk be, hogy a hat ember leültethető egy asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a vele szemben ülőt.
b) Hogyan tudjuk a feladatot általánosítani?

7. Tegyük föl, hogy egy G gráfból kitörlünk két csúcsot, mire az szétesik két három, egy négy, és két öt csúcsból álló komponensre. Lehet teljes párosítás G-ben? Általánosítsuk a megfigyelést!

Megoldás Nem lehet TP G-ben, mert a páratlan csúcsszámú komponenseken belül egy-egy csúcsnak biztosan nem jut pár, így azoknak a törölt csúcsok közt kell legyen párja. Viszont négy páratlan csúcsszámú komponens van, de csak két törölt csúcs. **Általánosítás:** ha egy G gráfból (nem kell, hogy páros legyen) k csúcsot törölve a maradékban több mint k páratlan csúcsszámú összefüggőségi komponens keletkezik, akkor G-ben nincs TP. (Ez a Tutte-tétel egyik iránya.)

8. (KöMaL K. 500.) Egy bálon öt fiú és öt lány szeretne táncolni a keringőben. Anna 160 cm, Bea 165 cm, Csilla 166 cm, Dóri 168 cm, Elvira 170 cm, míg Ferenc 166 cm, Gábor 168 cm, Hugó 169 cm, István 172 cm, János 178 cm magas. Hányféle párosításban táncolhatnak, ha minden lány csak nála magasabb fiúval táncolhat?

9. Egy $G = (A \cup B; E)$ egyszerű páros gráfról tudjuk, hogy az A-beli csúcsok fokai különbözőek és egyik sem nulla. Mutasd meg, hogy van A-t fedő párosítás!

Megoldás Első megoldás: A Hall-feltételt ellenőrízzük A-ban, és azt látjuk, hogy minden k elemű részhalmazában van olyan csúcs, akinek a szomszédsága legalább k elemű, vagyis az egész k-eleműhalmaznak is van k különböző szomszédja minimum. Második megoldás: megkonstruáljuk úgy, hogy A-ban növekvő fokszám szerint választunk a csúcsoknak párt azon szomszédai közül, akik még nem lette választva.

10. Van-e teljes párosítás G-ben, ha G csúcsai a számok 1-től n-ig, és két csúcs között akkor van él, ha a számok relatív prímek?

Megoldás Ha n páratlan, nyilván nincs. Ha n páros, akkor van, hiszen bármely két szomszédos szám relatív prím, így van köztük él; tehát az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\} \dots \{n-1, n\}$ élek TP-t alkotnak.

11. (KöMaL Gy.2209.) Kiszínezhető-e egy kockás papíron 25 mező úgy, hogy mindegyiküknek
a) páros számú, és legalább 2 szomszédja;
b) páratlan számúszomszédja legyen kiszínezve?
(Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.)

Megoldás a) igen. Egy "megdöntött nyolcassal" megvalósítható; itt egy kivétellel mindenkinek 2 lesz a foka. b) nem, mert a szomszédságok gráfjában minden komponens páros csúcsszámú kellene legyen.