Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 2. feladatsor

Emlékeztető: *Hall-tétel:* A $G = (A \cup B; E)$ *páros* (*kétosztályú*) gráfban van A-t fedő párosítás $\iff$ *minden* $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|N_G(X)| \geq |X|$, ahol $N_G(X) = \{v \in B \colon \exists u \in X, \text{ melyre } uv \in E\}$.

1. Egy társaságban a 70 fiú tag mindegyike 13 lányt ismer, minden lány pedig 14 fiút.

a) Hány lány tagja van a társaságnak?

b) Mutasd meg, hogy tudunk úgy fiú-lány párokat alkotni, hogy minden lány kapjon párt, mégpedig egy ismerősét!

Megoldásvázlat: Gráfhozzárendelés: páros gráf, a fiúk és lányok csúcsosztályaival és az ismeretségnek megfelelő élekkel. Az éleket kétféleképpen megszámoljuk: a fiúk felől $|E| = |F| * 13$, a lányok felől $|E| = |L| * 14$. Mivel $|F| = 70$, innen $|L| = 65$ adódik.
Hall-feltételt kell ellenőríznünk az L osztály X részhalmazaira; ebből következik L-et fedő párosítás léte (ami kell nekünk). Ez most X, valamint X szomszédsága, vagyis $N(X)$ közötti élek kétszeres leszámolásából adódik. Ez az élhalmaz pontosan $|X| * 14$ elemű, másrészt legfeljebb $|N(X)| * 13$ elemű.

2. Az óvodai ünnepélyen egy grafikusművész rajzokat készített a gyerekek egyes csoportjairól. Minden képen pontosan öt gyerek látható. Bizonyítsuk be, hogy ha minden gyerek legalább öt képen szerepel, akkor minden gyerek hazavihetett egy-egy olyan rajzot, melyen ő maga szerepel.

Megoldásvázlat: Az előző feladathoz hasonlóan a képek és a gyerekek közötti páros gráfban kell a gyerekeket fedő párosítást találni. Most az egyik osztályban minden fokszám pontosan 5, a másikban legfeljebb 5. Ismét Hall-f-t ellenőrzünk, és ismét abból adódik, hogy X és szomszédai közötti élek száma alapján $N(X)$ nem lehet kisebb X-nél.

3. Tegyük fel, hogy $A_1, \ldots, A_{10}$ egy X alaphalmaz 3-elemű részhalmazai úgy, hogy X minden eleme pontosan három darab A_i-ben szerepel. Igazold, hogy **a)** X 10 elemből áll; **b)** X elemei sorbarakhatók úgy, hogy az i-edik elem benne van A_i-ben!

Megoldásvázlat: Újra páros gráfot vezetünk be: elemek az egyik osztály, a 3-elemű részhalmazok a másik. Innen az első feladathoz hasonlóan látjuk, hogy a teljesül a gráf éleinek kétszeres leszámolásából adódóan; míg a második részhez elég egy teljes párosítást mutatni, az a sorbarakásnak megfeleltethető. Hall-f. ezt ugyanígy kiadja.

4. A $G = (V, E)$ gráfban legyenek az $A \subset V$ és $B \subset V$ diszjunkt csúcshalmazok. Tudjuk, hogy A minden csúcsának legalább 6 szomszédja van B-ben, és B minden csúcsának foka legfeljebb 4. Mutasd meg, hogy $|B| \geq \frac{3}{2}|A|$!

5. Legyen $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 16\}$, $B = \{-4, -3, -2, \ldots, 4\}$, $E = \{\{a, b\} \colon a \in A, b \in B, b^2 \geq a\}$. Mutasd meg, hogy a legnagyobb párosítás mérete $G = (A \cup B; E)$-ben 7.

Megoldásvázlat: Kettő irányunk van. Az egyik: 7-es párosítás létezik, vagyis a max párosítás minimum 7. (Ez könnyű). A másik: nincsen 7-esnél nagyobb párosítás: ez következik a deficites Hallból (egészen pontosan annak könnyű irányából), ha találunk olyan halmazt, aminek a deficite 2 (vagyis így a max párosítás legfeljebb $9 - 2 = 7$ lehet.)

6. Legyen egy nem feltétlenül egyszerű G páros gráfban a legnagyobb fokszám Δ. Mutasd meg, hogy G beágyazható egy (nem feltétlenül egyszerű) Δ-reguláris G' páros gráfba! (Azaz hozzávehetünk G-hez csúcsokat és éleket úgy, hogy a kapott G' gráfban minden csúcs foka Δ legyen.)

Megoldásvázlat: Mohó algoritmus elemzése.

7. Bizonyítsd be, hogy páros gráfokra $\chi'(G) = \Delta(G)$ (élkromatikus szám = max. fokszám)!

Megoldásvázlat: Az előző állításból vegyük észre hogy következik ez.

8. Tegyük fel, hogy a $G = (A \uplus B; E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és $\forall X \subset A$, $X \notin \{\emptyset, A\}$-ra $|N_G(X)| \geq |X| + 1$. Mutasd meg, hogy $\forall e \in E$-hez $\exists$ TP, melyben e szerepel!

9. Mutasd meg, hogy egy 20 elemű H halmaz minden 8 elemű A részhalmazához hozzárendelhetünk egy-egy különböző 9 elemű A' részhalmazt (azaz a hozzárendelés injektív), ami tartalmazza A-t!

10. Egy laktanya tíz pontjára egy-egy kéttagú őrséget akar szervezni az őrvezető. Előtte minden katonától megkérdezi, melyik őrhelyekre menne szívesen. Keress jó (azaz pontos) feltételt arra, hogy mikor oszthatóak be úgy a katonák az őrségre, hogy mindenki neki szimpatikus helyre menjen!

11. Mutasd meg, hogy egy n csúcsú páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha a benne található legnagyobb üres részgráfnak $n/2$ csúcsa van.

Megoldásvázlat: Ha van TP, akkor nyilván minden párból max egy csúcs lehet egy üres részgráfban. A fordított iránynál feltehető, hogy $|A| \leq |B|$. Bármely $X \subset A$-ra $X \cup B \setminus N(X)$ üres részgráf. $|N(X)| < |X| \iff |B \setminus N(X)| + |X| > |B| \geq n/2$.

12. Legyen G egy 10-reguláris, 45 csúcsú, egyszerű gráf. Mennyi a gráf élszínezési száma? Lehet-e a kromatikus száma 2? Lehet-e $\chi(G) = 3$?

Megoldásvázlat: Élszínezési szm: Vizing miatt 45 vagy 46 lehet. Ha 45 lenne, akkor minden csúcsban lenne minden színből pont egy, ami színenként egy-egy teljes párosításnak felel meg de nincs teljes párosítás páratlan csúcsszámú halmazon. Vagyis 46 lehet csak. Kromatikus szám: ha 10 reguláris, akkor nem lehet páros, mivel páros reguláris gráfban a két osztály egyforma méretű. Persze: hiszen az élszám épp a fokszám és a halmaz méretének szorzata. Szóval $\chi = 2$ kizárva. 3 meg simán lehet, pl 3 db diszjunkt 10-reguláris 15-csúcsú gráfot véve, ahol ezek 3-osztályú teljes gráfok.

13. Mennyi G kromatikus száma, ha G csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 100\}$, és $\{i, j\}$ $(i \neq j)$ pontosan akkor él, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$?

Megoldásvázlat: Az $\{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$ csúcsok K_7-et feszítenek, így $\chi(G) \geq 7$. Ennyi szín elegendő is: a számokat növekvő sorrendben színezzük úgy, hogy akkor váltunk új színre, amikor muszáj; így az 1-es piros, a $2; 3$ kék, a $4, 5, 6, 7$ zöld stb színezés jó lesz (mindig kettőhatványoknál váltunk); egy színosztályban sem lehet él, mert két azonos színű csúcs közül a kisebbiknek a legkisebb többszöröse (a kétszerese) biztosan nagyobb a nagyobbiknál.

14. Egy 15×15-ös mátrix minden sorában és oszlopában nyolc 1-es és hét 0 szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van a determinánsának nemnulla kifejtési tagja!

Megoldásvázlat: Készítsünk belőle 8-reguláris páros gráfot $2 \cdot 15$ csúcson. A determináns egy nemnulla kifejtési tagja éppen egy teljes párosításnak felel meg.

Canvas-on beadható: 12, 13, 14. *Egyéni munka kéretik.*