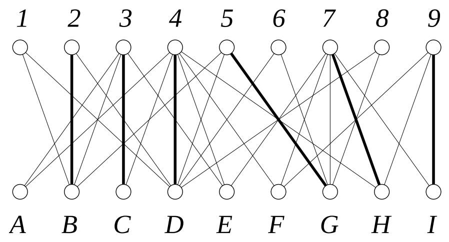
Véges matematika II. tanárszakos gyakorlat, 3. feladatsor

1. Az alábbi ábrán a vastag élek egy P kiindulási párosítást jelölnek. A javító utak módszerével keress egy lehető legnagyobb párosítást a felső osztályból indulva. Ezután egy megfelelő deficitű halmazzal igazold azt is, hogy nincs nagyobb.

Megoldás. Javító utak: alternáló utat keresünk a párosítással nem fedett pontokból $\{1, 6, 8\}$, ami felváltva nem-párosításbeli és párosításbeli élet tartalmaz, és végül nem fedett pontban ér véget. Ilyen pl: 1-D-4-F. Ekkor tudunk az út mentén cserélni: a nem-párosításbelieket bevenni a párosításbeliek helyére, és nő a párosítás mérete. Mivel van 2 deficitű halmaz, nevezetesen pl az $\{1, 2, 5, 6, 8\}$ halmaznak csak 3 szomszédja van, ezért legalább 2 csúcs nem fedett a felső osztályból a maximális párosításban. Így a megtalált 7 méretű párosítás maximális.



Emlékeztető: *Tutte tétele*: G-ben van TP $\Leftrightarrow$ G csúcsainak bármely S részhalmazát törölve a maradék gráfban legfeljebb $|S|$ darab páratlan csúcsszámú összefüggőségi komponens keletkezik.

2. Vegyük K_3-at. Ennek bármely csúcsát elhagyva két szomszédos csúcs marad, tehát nem keletkezik páratlan komponens; bármely két csúcsát elhagyva pedig csak egy csúcs marad. Így Tutte tétele szerint van K_3-ban teljes párosítás. Hol a hiba ebben az okoskodásban?

Megoldás. Az üres halmaz is részhalmaz, arra is teljesülnie kell a feltételnek.

3. Tegyük föl, hogy a G (nem feltétlenül páros) gráf 3-reguláris, és bármely élet elhagyva összefüggő marad. Mutassuk meg, hogy van G-ben teljes párosítás! (Tutte tételét szabad használni.)

Megoldás. (Ez Petersen tétele.) Indirekte tegyük föl, hogy az S csúcshalmazt törölve több mint $|S|$ páratlan csúcszámú összefüggőségi komponens keletkezik. Mindegyik ilyen komponensből kell menjen legalább két él S-be a feltétel miatt (egy kevés, törölve szétesne); de pontosan kettő nem mehet, mert a 3-regularitás miatt a páratlan csúcsszámú komponensben páratlan volna a fokszámösszeg. Így legalább három él megy S-ből minden páratlan komponensbe, de S-ből legfeljebb $3|S|$ él indulhat, ellentmondás.

4. Minden egész k-ra konstruálj k-reguláris gráfot, aminek nincs teljes párosítása.

Megoldás. Páros k-ra különösen könnyű, mert elegendő, ha páratlan csúcsszámon határozod meg a gráfot: így biztos nem lesz benne teljes párosítás. Pl: egy kör mentén helyezed el a csúcsokat ($n > k$ legyen), és azokat kötöd össze, akik a kör mentén legfeljebb $k/2$ távolságnyira vannak. Páratlanra ez a módszer reménytelen, mert a fokszámösszegnek párosnak kell lennie, így csak páros sok csúcsból indulhatunk ki. Szóval kell egy ötlet: gondoljunk a Tutte-tételre, hogy milyen módon lehet garantálni a teljes párosítás nem létezését. Hát pl. úgy, hogy legyen egy elvágó csúcsunk, aminek a kihajításával több (vagyis legalább 3) páratlan komponensre esik a gráf. Innen elég a komponensek fokszámait jól beállítani: ezek páratlan csúcsszámon majdnem k-reguláris gráfok. Ilyet könnyű gyártani a fenti módszerrel: $k - 1$ reguláris példából kiindulva még egy 1 pont híján mindent fedő párosítást kell bevenni.

5. Egy $n \times n$ méretű, nemnegatív valós számokat tartalmazó mátrix minden sorában és minden oszlopában az elemek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy a mátrix determinánsának van nem nulla kifejtési tagja!

Megoldás. Mint az előző feladatsoron a 15×15-ös mátrix esetében: gráfot rendelünk a mátrixhoz. Csúcsait az oszlopoknak és soroknak felelnek meg, élei pedig egy-egy oszlop-sor pár metszetében álló nem-nulla számnak. Innentől elég, ha Hall tételét alkalmazzuk.

Emlékeztető:
A G gráf legnagyobb teljes részgráfjának (klikkjének) méretét $\omega(G)$; legnagyobb független csúcshalmazának méretét $\alpha(G)$; legnagyobb független élhalmazának (azaz maximális párosításának) méretét $\nu(G)$; legkisebb lefogó csúcshalmazának méretét $\tau(G)$; legkisebb domináló csúcshalmazának méretét $\gamma(G)$; legkisebb lefedő élhalmazának méretét $\varrho(G)$ jelöli.

6. Határozd meg $K_{3,3}$-ban és a Petersen-gráfban a **a)** legkisebb domináló ponthalmaz méretét (γ); **b)** legkisebb lefedő élhalmaz méretét (ϱ); **c)** legnagyobb független ponthalmaz méretét (α); **d)** legnagyobb független élhalmaz méretét (ν); **e)** legkisebb lefogó ponthalmaz méretét (τ); **f)** legnagyobb klikk méretét (ω)!

7. Legyen $V = \{1, ..., 100\}$, $E = \{\{i, j\} \subset V : |i - j| \in \{1, 2, 3\}\}$ és $G = (V, E)$. Határozd meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\varrho(G)$ gráfparamétereket!

Megoldás. Gallai-t: ha egyszerű, izolált ponttól mentes, akkor $\alpha + \tau = \nu + \rho = n = 100$. Elég tehát a pont-paraméterek ill. az élparaméterek egyikét meghatározni.
$\alpha \leq 25$, mert sorban haladva 4-es kupacokra osztva a gráf csúcshalmazát, azt látjuk, hogy minden kupac egy klikk, vagyis ezek mindengyikéből legfeljebb 1-et válaszhatunk bármely független halmazba.
$\alpha \geq 25$, mert az azonos 4-es maradékú csúcsok független halmazt alkotnak. Köv.: $\alpha = 25, \tau = 75$.
$\nu \leq 50$, mert $\nu \leq n/2$ mindig. De $\nu \geq 50$ szintén, hiszen $\{(2k-1, 2k) | k = 1 \ldots 50\}$ egy fgtn élhalmaz.
Köv.: $\nu = 50, \rho = 50$.

8. Határozd meg az $\alpha(\overline{C_n})$, $\nu(\overline{C_n})$, $\tau(\overline{C_n})$, $\varrho(\overline{C_n})$ értékeket!

9. Legyen a G egyszerű gráf pontjainak halmaza $\{1, \ldots, 60\}$, és (i, j) pontosan akkor legyen él $(i \neq j)$, ha $i \cdot j$ osztható 6-tal. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\tau(G)$ és $\rho(G)$ értékeket!

Megoldás-elindulás. Térképezzük fel a gráfot! A feltételek szerint az élek csak a csúcsok 2-vel ill 3-mal való oszthatóságától függenek, ennek nyomán könnyű észrevenni, hogy 4 csoportba oszthatóak: 0 (mod 6) csúcsok, $1, 5$ (mod 6) csúcsok, $2, 4$ (mod 6) csúcsok, és 3 (mod 6) csúcsok. Ezen csoportok mindegyike üres vagy teljes gráf, és minden csoportpár teljes páros gráfot feszít, vagy nem halad közöttük él. Ennek alapján a paraméterek meghatározása egyszerű. $\alpha = 40, \nu = 20$

10. Nézzünk rá a sakktáblára!
a) Hány huszár (ló) helyezhető el legfeljebb, hogy ne legyen kettő, amik egymást ütnék?
b) hány huszár helyezhető el legalább, hogy minden mezőt ütés alatt tartsanak (amin épp nem állnak)? Adjunk alsó/felső becsléseket!
c) Mi köze ezen feladatoknak a gráfokhoz?

Megoldásvázlat. a) 32 elhelyezhető. Több nem helyezhető el. b) 12 elhelyezhető. Könnyű látni, hogy 7 még kevés mert midnen ló legfeljebb 8 helyre üthet, plusz egy mezőn áll, vagyis ennyi ló csak 63 mezőt fogna le. 12 az igazság amúgy. c) vegyünk fel gráfokat: csúcsok a mezők, élek az egy mezőről a bábu lépésével elérhető mezőkbe futnak. Első feladatban elegendő volt azt látni, hogy $\alpha(G) = 32$. A második feladat a dominálási számról szólt.