

Véges matematika I. tanári gyakorlat

1. alkalom - 2023. szeptember 12.

Gyakorlatvezető: Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli

Alapozás

1. Egy futóversenyen 20 versenyző indult. Tudjuk, hogy egyikük sem adta fel, és holtverseny sem alakult ki. Hányféle végeredménye lehetett a versenynek? Hányféleképpen alakulhatott az első három hely sorsa?
2. Hányféleképpen festhetjük egy n -emeletes ház szintjeit pirosra, sárgára és kékre?
b) Mi a helyzet akkor, ha a szomszédos szintek nem lehetnek azonos színűek?
3. Hány 8-jegyű szám van? Ezek közül hány olyan van,
a) amelynek szomszédos jegyei különbözők?
b) amelyben szerepel 5-ös számjegy?
c) amelyben nem szerepel 5-ös számjegy?
4. Egy dobozban 10 piros, 20 sárga és 40 zöld golyó található. Becsukott szemmel legalább hány golyót kell kihúznunk ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között
a) sárga golyó?
b) három különböző színű golyó?
c) három azonos színű golyó?
d) tizenöt azonos színű golyó?
e) két egymás után kihúzott zöld golyó?
5. n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n -re
(a) $2^n > n$;
(b) $2^{2n} - 1$ osztható 3-mal;
(c) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 6.* Legalább hány embernek kell egy osztályba járnia ahhoz, hogy biztosan legyen
a) olyan hónap, amelyben legalább 4 születésnap van?
b) legalább két olyan hónap, amelyekben legalább 2 születésnap van?

Gyakorlás

7. Hányféleképpen sorakozhat fel egy állatidomár mögött 4 oroszlán, 2 tigris és 3 jegesmedve?
8. Hány buszjegyre van szükségünk ahhoz, hogy tetszőleges lyukkombináció esetén legyen érvényes jegyünk? (A lyukasztógép pontosan 3 lyukat ejt.) Hány jegy kellene, ha 6-ot lyukasztana a gép?
9. Hányféleképpen lehet kitölteni egy $13+1$ soros totószelvényt úgy, hogy az első 4 sorban (a) legfeljebb 1 db X legyen? (b) legalább 1 db X legyen?
10. Hány részhalmaza van egy n -elemű halmaznak?

Kitekintés (csillagos= beadható)

11. Van 100 zsákod, mindegyikben legalább 100 pénzérme, de nem tudjuk hogy pontosan mennyi. Az egyik zsák hamis érmékkel van tele. Tudjuk, hogy a valódi érme súlya 2 gramm, a hamisé pedig 1 gramm. Egy olyan mérleged van, amelyen csak egyszer mérhetünk, de akkor gramm pontossággal. Hogyan állapítjuk meg, hogy melyik zsákban vannak a hamis érmék?

12. Hányféleképpen állhat fel egy fényképezéshez n fiú és n lány egy sorba úgy, hogy se két fiú, se két lány nem állhat egymás mellett?

13. Hány olyan különböző téglalap van a síkon, amelynek minden oldala párhuzamos az x , illetve az y tengellyel, továbbá csúcsainak mindkét koordinátája 1 és n közötti egész szám?

14.* 100 ember fejére egy-egy fehér vagy fekete sapkát teszünk. Semmilyen jelzést nem adhatnak egymásnak, de mindenki körülnézhet, tehát a sajátján kívül minden sapka színét látja. Előzetes összebeszélés után sípszóra mindenkinek fel kell emelnie a bal vagy a jobb kezét. Elérhető-e, hogy pontosan a feketék emeljék fel a jobb kezüket és a fehérek a balt, vagy esetleg fordítva, a feketék a balt és a fehérek a jobbat?

15.* Igazoljuk, hogy a $\sqrt{3}$ szám tizedestört alakjában nemcsak egyféle, hanem legalább kétféle számjegy is van ami végtelen sokszor szerepel?