Véges matematika I. tanári gyakorlat

1. feladatsor megoldásvázlatok- 2023. szeptember 12.

Gyakorlatvezetõ: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

Alapozás

1. Egy futóversenyen 20 versenyzõ indult. Tudjuk, hogy egyikük sem adta fel, és holtverseny sem alakult ki. Hányféle végeredménye lehetett a versenynek? Hányféleképpen alakulhatott az elsõ három hely sorsa?

Megoldásvázlat: Sorban megszámoljuk, hogy az első, második, stb helyekre hányan érkezhetnek be. Aki már korábban jobb eredménnyel el lett könyvelve, az nem jön szóba, így a k. helyen $20-(k-1)$ helyezett között válaszhatunk. eredmény 20!, illetve $20 \cdot 19 \cdot 18$, hiszen a végső sorrend a kérdés, vagyis az egyes helyezésekre szóbajövő mennyiségeket szorozzuk. (Ismétlés nélküli permutáció, illetve ismétlés nélküli variáció).

2. Hányféleképpen festhetjük egy n-emeletes ház szintjeit pirosra, sárgára és kékre?
b) Mi a helyzet akkor, ha a szomszédos szintek nem lehetnek azonos színűek?

Megoldásvázlat: Módszer: alulról felfelé megfestjük az emeleteket. a) minden emeletet 3 színűre festhetünk. így összesen 3^n-féleképpen (ismétléses variáció). b) az elsõ szint bármilyen színû lehet, utána mindenütt csak két színbõl választhatunk: $3 \cdot 2^{n-1}$-féleképpen. Valójában itt számít az festési sorrend meghatározása: ha alulról felfelé haladunk, akkor MINDEN színválasztás esetén ugyanannyi a soron következő emeletnél használható színek száma. (Ha összevissza sorrendben színeznénk az emeleteket, ez nem lenne így: ha egy emelet két szomszédját megszíneztük, akkor attól függően marad egy vagy 2 szín lehetőség az emelet festésére, hogy különböző vagy azonos színű a két szomszéd.)

3. Hány 8-jegyû szám van? Ezek közül hány olyan van,
a) amelynek szomszédos jegyei különbözõk?
b) amelyben szerepel 5-ös számjegy?
c) amelyben nem szerepel 5-ös számjegy?

Megoldásvázlat: $9 \cdot 10^7$ a nyolc-jegyűek száma: minden jegy 10-féle lehet, kivéve az első számjegy, hiszen az nem 0.
a) 9^8 (az első jegytől kezdve sorban választjuk ki a soron következő jegyet, mindig egyféle lehetőség van tiltva a 10 közül.)
b) Lehetne összegezni is az eseteket, típusokra bontani is aszerint, hogy hányadik számjegy az ELSŐ 5-ös. De egyszerűbb így: összesből kidobjuk a rosszat (amikor nincs 5), vagyis $9 \cdot 10^7 - 8 \cdot 9^7$.
c) $8 \cdot 9^7$. (mint a), csak eggyel kevesebb fajta számjeggyel.)

4. Egy dobozban 10 piros, 20 sárga és 40 zöld golyó található. Becsukott szemmel legalább hány golyót kell kihúznunk ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között
a) sárga golyó?
b) három különbözõ színû golyó?
c) három azonos színû golyó?
d) tizenöt azonos színû golyó?
e) két egymás után kihúzott zöld golyó?

Megoldásvázlat:
a) 10+40 kevés (10P+40Z), 51 elég.
b) 20+40 kevés (20S+40Z), 61 elég.
c) $2 \cdot 3$ kevés, 7 elég skatulya elv.
d) $10+14+14$ kevés, 39 elég. (indirekt módszerrel.)

e) 61 kevés: ZP(10×)ZS(20×)Z. 62 elég. Magyarázat: skatulya elv. Ha van 62 golyónk, van közt legalább 32 Z. másrészt ha sorban húzunk 62-szer, azt úgy is nézhetjük, hogy sorban megtöltünk 31 darab két golyóhelyes skatulyát. lesz olyan skatulya, amibe két Z kerül tehát.

5. n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re

(a) $2^n > n$;

(b) $2^{2n} - 1$ osztható 3-mal;

(c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Megoldásvázlat:

(a) kezdőlépés: $n = 1$-re jó $(2 > 1)$. Ind. lépés: feltehetjük, hogy valamely n-re igaz, és most belátjuk hogy ekkor $n+1$-re is teljesül. Ha $2^n > n$, akkor $2 \cdot 2^n > 2n$, de $2 \cdot 2^n = 2^{n+1} > 2n \geq n+1$ mivel $n \geq 1$, és mi épp azt akartuk belátni, hogy $2^{n+1} > n+1$.

(b) kezdőlépés: $n = 1$-re jó $(3|3)$. Indukciós lépés: $2^{2n+1} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = (3+1)2^{2n} - 1 = 3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} - 1$. Ha tudjuk hogy $3|(2^{2n} - 1)$, akkor $3|3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} - 1$ is adódik.
Másképp: 2^{2n} 3-as maradéka 1. Ha olyan számmal szorozzuk, aminek 3-as maradéka 1, akkor továbbra is olyat kapunk, aminek 3-as maradéka 1.

(c) Kezdőlépés: $1 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$. Indukciós lépés: ha $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ valamely n-re, akkor igazolandó hogy $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Ehhez elég belátni - felhasználva az indukciós hipotézist - hogy

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Ez egy azonosság: a megfelelő együtthatók mindkét oldalon megegyeznek.

6.* Legalább hány embernek kell egy osztályba járnia ahhoz, hogy biztosan legyen
a) olyan hónap, amelyben legalább 4 születésnap van?
b) legalább két olyan hónap, amelyekben legalább 2 születésnap van?

Gyakorlás

7. Hányféleképpen sorakozhat fel egy állatidomár mögött 4 oroszlán, 2 tigris és 3 jegesmedve?
Megoldásvázlat:
$\frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 3!}$ (ismétléses permutáció, vagyis ha az a modellunk, hogy különbözőeket sorbarendezünk, aztán leosztunk aszerint, hogy ugyanazt a sorrendet hányféle sorrendet kaphatjuk meg, figyelembe véve az azonos állatfajok egymáshoz képesti sorbarendezéseit.) Vagy másképpen $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$-féleképpen, ha sorban az oroszlánok, tigrisek és jegesmedvék helyeit választjuk ki az eredetileg 9, majd a fennmaradó 5 ill. 3 el nem foglalt hely közül.

8. Hány buszjegyre van szükségünk ahhoz, hogy tetszõleges lyukkombináció esetén legyen érvényes jegyünk? (A lyukasztógép pontosan 3 lyukat ejt.) Hány jegy kellene, ha 6-ot lyukasztana a gép?
Megoldásvázlat: $\binom{9}{3}$ (ismétlés nélküli kombináció). A második esetben ugyanennyi jegyre van szükségünk, hiszen 9 elembõl 6-ot ugyanannyiféleképpen választhatunk ki, mint 3-at: bármely 3 kiválasztása kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető a maradék 6 nem-kiválasztásának.

9. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 13+1 soros totószelvényt úgy, hogy az elsõ 4 sorban (a) legfeljebb 1 db X legyen? (b) legalább 1 db X legyen?

Megoldásvázlat: Az a) esetben adjuk össze az elsõ 4 sorban pontosan 0 db, illetve pontosan 1 db X-et tartalmazó szelvények számát, ez $2^4 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 2^3 \cdot 3^{10}$. A b) esetben vonjuk ki az összes esetbõl az elsõ 4 sorban pontosan 0 db X-et tartalmazó szelvények számát, az eredmény $3^{14} - 2^4 \cdot 3^{10}$.

10. Hány részhalmaza van egy n-elemû halmaznak?

Megoldásvázlat:

Válasz: Az összes részhalmazok száma 2^n. Minden elemrõl a többitől függetlenül dönthetjük el, hogy bevesszük-e egy részhalmazba, vagy sem.

Kitekintés (csillagos= beadható)

11. Van 100 zsákod, mindegyikben legalább 100 pénzérme, de nem tudjuk hogy pontosan mennyi. Az egyik zsák hamis érmékkel van tele. Tudjuk, hogy a valódi érmék súlya 2 gramm, a hamisé pedig 1 gramm. Egy olyan mérleged van, amelyen csak egyszer mérhetünk, de akkor gramm pontossággal. Hogyan állapítjuk meg, hogy melyik zsákban vannak a hamis érmék?

Megoldásvázlat: Vegyünk az elsõ zsákból 1, a másodikból 2, ... a 100.-ból 100 érmét, és ezt az érmehalmot mérjük le. Amennyivel eltér a kapott eredmény $2(1 + 2 + \ldots + 100)$-tól, az lesz a hamis érméket tartalmazó zsák sorszáma.

12. Hányféleképpen állhat fel egy fényképezéshez n fiú és n lány egy sorba úgy, hogy se két fiú, se két lány nem állhat egymás mellett?

Megoldásvázlat: $2 \cdot (n!)^2$-féleképpen: elõször eldöntjük, hogy fiú vagy lány kezdje a sort (2 lehetõség), majd egymás közt a fiúkat és a lányokat is $n!$-féleképpen permutálhatjuk.
Másképp: az elsõ helyre $2n$ ember közül választhatunk, a következõre n közül (itt már adott, hogy fiú vagy lány kerül erre a helyre), majd $n-1$, $n-1$, $n-2$, $n-2$ stb. választási lehetõségünk van.

13. Hány olyan különbözõ téglalap van a síkon, amelynek minden oldala párhuzamos az x, illetve az y tengellyel, továbbá csúcsainak mindkét koordinátája 1 és n közötti egész szám?

Megoldásvázlat: Vetítsük le a téglalap két merõleges oldalát a tengelyekre, ekkor minden téglalapnak megfelel egy-egy szakasz az x és az y tengelyen. Hasonlóképpen, bárhogy veszünk fel két szakaszt a tengelyeken, amelyek végpontjai 1 és n közötti egészek, ezek egyértelmûen meghatároznak egy téglalapot. Így a téglalapok száma a szakaszok lehetséges kiválasztásainak számával egyenlõ, ami $\binom{n}{2}^2 = \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{4}$.

14.* 100 ember fejére egy-egy fehér vagy fekete sapkát teszünk. Semmilyen jelzést nem adhatnak egymásnak, de mindenki körülnézhet, tehát a sajátján kívül minden sapka színét látja. Elõzetes összebeszélés után sípszóra mindenkinek fel kell emelnie a bal vagy a jobb kezét. Elérhetõ-e, hogy pontosan a feketék emeljék fel a jobb kezüket és a fehérek a balt, vagy esetleg fordítva, a feketék a balt és a fehérek a jobbat?

15.* Igazoljuk, hogy a $\sqrt{3}$ szám tizedestört alakjában nemcsak egyféle, hanem legalább kétféle számjegy is van ami végtelen sokszor szerepel?