Véges matematika I. tanári gyakorlat

2. feladatsor megoldásvázlatok

Gyakorlatvezető: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek: indirekt biz., teljes indukció fajtái, skatulya elv, leszámlálási technikák

Alapozás

1. Fel tudjuk-e bontani a szabályos háromszöget a) 99, b) 100, c) 101 szabályos háromszögre?

Megoldásvázlat: Bármely szabályos háromszög (az oldalfelező pontokon keresztül) felosztható 4 darab kisebb szabályos háromszögre. Egy ilyen művelet elvégzésével a háromszögek száma 3-mal növekszik. Hasonlóan egy tetszőleges szabályos háromszöget fel lehet bontani 1 közepes (2/3-szoros oldalméretű) és 5 kicsi (1/3-szoros oldalméretű) szabályos háromszögre. Itt 5-tel növekszik a háromszöget száma. Ezen két lépés ismételgetésével elérhetők a fentebb előírt számok.

a) Pl.: 1 db +5 és 31 db +3
b) Pl.: 0 db +5 és 33 db +3
c) Pl.: 2 db +5 és 30 db +3

2. Hányféleképpen oszthatunk ki
a) tizennégy embernek hat db. különböző könyvet úgy, hogy bárki bármennyit kaphat?
b) nyolc embernek tizenöt db. különböző könyvből, ha mindenki pontosan egy könyvet kap?
c) tizenkét embernek hét db. különböző könyvet úgy, hogy mindenki legfeljebb egyet kap?
d) tíz embernek tíz db. különböző könyvet úgy, hogy mindenki pontosan egyet kapjon?
e) hét embernek hét db. különböző könyvet úgy, hogy egy fő híján mindenki kapjon?

Megoldásvázlat:

a) Minden könyvhöz hozzá kell rendelni (pontosan) egy embert (hogy kinek adjuk); könyvenként függetlenül döntve tehát 14^6.

b) Minden emberhez hozzá kell rendelni (pontosan) egy könyvet (hogy mit kap); emberenként függetlenül döntve $15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 8$.

c) Ismét minden könyvhöz kell rendelni egy-egy különböző embert; könyvenként függetlenül döntve $12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 6$.

d) Akár a könyvek, akár az emberek felől nézhetjük; a válasz 10! lesz. (Gondold meg!)

e) Azaz egy ember nem kap, egyvalaki pedig kettőt kap, a többiek pontosan egyet. Kiválasztjuk, ki nem kap (7 lehetőség), és hogy ki kap kettőt (6 lehetőség); majd a hétből öt könyvet osszunk ki a maradék öt ember között (fejenként egyet; ez $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3$ lehetőség). Ezek független döntések, így a válasz $7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3$.

3. Hány olyan 10-hosszúságú kockadobás-sorozat van, amelyben
a) csak 2-es és 6-os szerepel?
b) három 2-es, két 3-as és öt 6-os szerepel?
c) legfeljebb három 6-os szerepel?

Megoldásvázlat:

a) Minden dobás egymástól függetlenül kétféle lehet, így a válasz 2^{10}.

b) A 10 hely közül kiválasztjuk azt a 3 helyet, ahova kettes kerül. Ez $\binom{10}{3}$ lehetőség. Az itteni választástól függetlenül 7 hely marad, ahova 2 hármas kerül, ami $\binom{7}{2}$. A maradék 5 helyre az 5 hatost $\binom{5}{5} = 1$-féleképpen lehet kiosztani. Így az összes eset száma: $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{5}$.

Meggondolható, hogy ha a számok sorrendjét máshogy választjuk (pl. előbbször a hatosokat, utána a hármasokat és végül a ketteseket), akkor is ugyanehhez az eredményhez jutunk. ($\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}$.)

Másik megoldás. A 10 számot 10!-féleképpen lehet 10 hosszú sorozatot alkotni. Ezek közül mindegyik lehetőséget többször számoltuk. A 3 kettest 3!-féleképpen permutálva ugyanazt a sorozatot kapjuk. Hasonlóan a 2 hármast 2!-féleképpen, az 5 hatost pedig 5!-féleképpen lehet permutálni. Ezek egymástól függetlenül megtehetők, így az eredeti leszámolásban minden sorrendet valójában $(3! \cdot 2! \cdot 5!)$-szor számoltunk. Így a válasz $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!}$.

4. Le tudjuk-e hézagmentesen fedni a sakktáblát 1×2-es dominókkal úgy, hogy az A1 és a H8 mezők fedetlenek maradnak?

Megoldásvázlat: Nem lehet. A sakktábla hagyományos színezése szerint az A1 és H8 mezők színe fekete. Így ezeket elhagyva 30 fekete, és 32 fehér mezőt kell lefedni. Viszont egy 1×2 méretű dominót bárhogy lehelyezve (2 mezőre) az miden esetben 1 fehér és 1 fekete mezőt fed le.

Gyakorlás

5.* Hány olyan 8 hosszúságú sorozat van, ahol minden elem vagy 0 vagy 1, és az 1-esek száma páros?

6. Legfeljebb hány természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható 153-mal?

Megoldásvázlat: Két szám különbsége pontosan akkor osztható 153-mal, ha ez a két szám ugyanazt a maradékot adja 153-mal osztva. A maradékok lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots, 152$ lehetnek. Így 153 szám még megadható, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen 153-mal osztható (pl. $0, 1, 2, \ldots, 152$ számok). Viszont ha már can legalább 154 szám, akkor a skatulya elv miatt már lesz legalább kettő különböző szám, ami a ugyanabba a maradékosztályba esik. Ezek különbsége szükségszerűen osztható 153-mal.

Végiggondolható, hogy a fenti érvelésben az $n = 153$ szám nem volt lényeges. Tetszőleges pozitív egész n-re legfeljebb n szám adható meg, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható n-nel.

7. Hány olyan permutációja van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak, amelyben az 1, 2, 3, 4 számok ebben a sorrendben szerepelnek? (Tehát az 1 előbb van, mint a 2, a 3 és a 4; a 2 előbb van, mint a 3 és a 4; a 3 pedig előbb van, mint a 4.)

Megoldásvázlat: Listázzuk ki mind az $n!$ permutációját a számoknak, és ezek közül számoljuk meg, hogy melyek elégítik ki a feltételt. Rendezzük a permutációkat aszerint, hogy az $1, 2, 3, 4$ számok melyik helyeken vannak (valamilyen sorrendben). Mindegyik ilyen csoportban 4! ilyen számsor van, amiből pontosan egyben vannak az $1, 2, 3, 4$ számok a megfelelő sorrendben. Így a válasz $\frac{n!}{4!}$.

8. Rögzített n esetén melyik a legnagyobb az $\binom{n}{k}$ alakú binomiális együtthatók közül?

Megoldásvázlat: A binomiális együtthatók kibontása után a $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ ekvivalens a $n - k + 1 > k$ vagyis a $\frac{n+1}{2} > k$ feltétellel. Ez azt jelent, hogy $0 \leq k < \frac{n+1}{2}$ esetén $\binom{n}{k}$ szigorúan monoton nő, valamint hogy $\frac{n+1}{2} < k \leq n$ szigorúan monoton csökken.

Ha n páros, akkor $k < \frac{n+1}{2}$ ekvivalens a $k \leq \frac{n}{2}$ feltétellel. Hasonlóan $\frac{n+1}{2} > k$ ekvivalens a $\frac{n}{2} \geq k$ kifejezéssel. Így a fentiek alapján $k = \frac{n}{2}$ esetén lesz $\binom{n}{k}$ maximális.

Ha n páratlan, akkor $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ esetén szigorúan növekedig $\binom{n}{k}$, másfelől $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n$ esetén pedig szigorúan csökken. Így a legnagyobb megtalálásához elég a $k = \frac{n-1}{2}$ és a $k = \frac{n+1}{2}$ számokhoz tartozó értéket összehasonlítani. Viszont $\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$ adódik (a képlet kibontásával, vagy azt észrevéve, hogy egy n elemű halmazból $\frac{n-1}{2}$ elemet kiválasztása ekvivalens $\frac{n+1}{2}$ elem nem kiválasztásával). Így a maximum ebben az esetben két helyen is felvevődik.

(Tehát a legnagyobb elem mindig az, ami a Pascal-háromszög középső szimmetriatengelyéhez a legközelebb van.)

9. Hányféleképp oszthatunk szét egy 52 lapos franciakártya-csomagot 4 játékos között úgy, hogy mindenki 13 lapot kapjon, továbbá a legidősebb játékosnak pontosan 2 ász és 5 treff jusson?

Megoldásvázlat: Két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a legidősebb játékoshoz kerül-e a treff ász, vagy nem.

Az első esetben a treff ász mellé még 3-féle ászt választhatunk neki, továbbá a maradék 12 treffből további 4-et, és a maradék 36 lapból még további 7-et (így lesz 13 lapja). A következő játékos a maradék 39 lap közül kap 13-at, az utána következő a maradék 26-ból 13-at, az utolsó pedig a maradékot.

A második esetben a legidősebb játékosnak 3 ászból választunk 2-t, majd 12 treffből 5-öt, végül a maradék 45 lapból 6-ot, a többi játékosnál pedig ugyanaz a helyzet, mint az első esetben. Így az összes lehetőség száma a két eset együttesen, vagyis $3 \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{36}{7} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} + \binom{3}{2} \cdot \binom{12}{5} \cdot \binom{36}{6} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13}$.

10. Legfeljebb hány pozitív egész számot választhatunk ki 1 és 1000 között úgy, hogy semelyik kettő se legyen relatív prím egymáshoz?

Megoldásvázlat: 500 számot még ki lehet választani: az összes páros számot. Ezek közül bármelyik kettő osztható 2-vel, így nem relatív prímek.

Megmutatjuk, hogy 501 szám már sose választható ki. Az 1 és 1000 közötti számokból képezhetünk 500 darab skatulyát, hogy az i-edik skatulyába a $2i - 1$ és a $2i$ számokat tesszük. Vegyük észre, hogy az egy skatulyába helyezett számok mindig relatív prímek. Ha viszont a számok közül legalább 501-et választunk ki, akkor a skatulya-elv miatt szükségszerűen lesz (legalább) egy olyan skatulya, amiből mindkét számot kiválasztottuk. Ez a két szám nem relatív prím.

11.* Hány olyan 10 betûbõl álló (nem feltétlenül értelmes) szó van, amelyben 4 különbözõ magánhangzó található? (A mássalhangzók között lehetnek egyformák is. A magyar abc-ben 14 magánhangzó és 21 mássalhangzó van.)

Kitekintés

12.* Hányféleképp választhatunk ki az 1 és 100 közötti pozitív egész számok közül három különbözőt úgy, hogy az összegük osztható legyen 3-mal?

13. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges 100 természetes szám közül kiválasztható néhány, amelyek összege 100-zal osztható!

Megoldásvázlat: Legyenek a megadott számok $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Képezzük ezekből a következő 100 összeget.

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \quad s_3 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \ldots, \quad s_{100} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}$$

Ha ezek közül bármelyik osztható 100-zal, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben az $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ számok 100-zal vett osztási maradéka az $1, 2, \ldots, 99$ számok közül kerül ki. Mivel ez 99-féle lehetőség, így a skatulya elv miatt lesz két összeg, mondjuk s_k és s_n, amik 100-zal osztva ugyanazt a maradékot adják. Az általánosság megszorítása nélkül Feltehetjük, hogy $k < n$. Ekkor $s_n - s_k$ osztható 100-zal, viszont a konstrukció alapján $s_n - s_k = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n$, így ezen (Eredeti) számok összege osztható 100-zal.
(Vegyük észre, hogy valójában azt bizonítottuk be, hogy az eredeti 100 szám közül mindig tudunk néhány (mondási sorrend szerint) *szomszédosat* kiválasztani, hogy azok összege 100 többszöröse legyen.)