

Véges matematika I. tanári gyakorlat

3. feladatsor - 2023. szeptember 26.

Gyakorlatvezető: Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek: sorbarendezések, kiválasztások, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés útján való számolások

Alapozás

1. Hányféleképpen olvashatjuk ki a TÚRÓRUDI szót az alábbi táblázatból, ha mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk? (Keressünk általános képletet is, n betűs szavakra!)

T	Ú	R	Ó	R	U	D	I
Ú	R	Ó	R	U	D	I	
R	Ó	R	U	D	I		
Ó	R	U	D	I			
R	U	D	I				
U	D	I					
D	I						
I							

2. Hányféleképpen tehetünk fel egy (8×8) -as sakktáblára

- a) egy fekete és egy fehér bástyát;
- b) két fehér bástyát;
- c) egy fekete, egy fehér és egy zöld bástyát;
- d) három fehér bástyát;
- e) három fekete és négy fehér bástyát?

3. Hányféleképpen oszthatunk szét 8 szál (egyforma) tulipánt 5 különböző vázába? (A vázák közül bizonyosak akár üresek is maradhatnak.)

4. Hány olyan 1000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel?

5. Egy 2 méter oldalú, négyzet alakú céltáblába belelövünk 5 golyót. Mutassuk meg, hogy lesz két olyan lyuk, amelyek távolsága legfeljebb 1,5 méter! Állíthatunk-e ennél erősebbet is?

6. Hányféleképpen olvashatjuk ki a MATEMATIKA szót az alábbi táblázatból, ha mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk? (Keressünk általános képletet is, tetszőleges $a \times b$ méretű táblázatra!)

M	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A

Gyakorlás

7.* Karácsonykor 15 faktos diákunk között akarunk kiosztani összesen 24 (egyforma) kókuszos szaloncukrot. Hányféle kiosztás lehetséges, ha mindenkinek akarunk adni legalább 1-et? (3. előadás utánra javasolt!)

8. Hány páros elemszámú részhalmaza van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak? Mennyi lehet az olyan részhalmazok száma ahol az elemek összege páros?

9.* Hány négyzetszám között van biztosan kettő, amelyek különbsége osztható

a) 3-mal b) 4-gyel c) 8-cal?

10. 9 látszólag egyforma érme közül az egyik hamis: könnyebb a többinél. Hány méréssel lehet a hamis érmét egy kétkarú mérleg segítségével megtalálni? Mi a helyzet, ha 20 érme van, és köztük szintén egy a hamis?

Kitekintés

11. Mutassuk meg, hogy bármely n egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható $n!$ -sal!

12. 17 doboz mindegyikében piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve mind a négyféle golyóból páros sok van!

13. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex n -szög átlóinak?

14. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 25 fős első osztályban van két diák, akinek a születésnapja egyazon napra esik? Feltételezzük, hogy minden diák egymástól függetlenül születik az év bármely napján, és hogy a közoktatási törvény szerint az évkezdés napján mindenki betöltötte a 6 évet, de senki sem 7 éves még.

15.* Igazoljuk, hogy ha $a \leq b$ pozitív egészek, akkor $2^a \leq \binom{a+b}{b} \leq 2^{a+b}$ teljesül. (Segítség: az alapozó feladatok eredményei hasznosíthatóak.)