Véges matematika I. tanári gyakorlat

3. feladatsor -Megoldásvázlatok

Gyakorlatvezető: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek: sorbarendezések, kiválasztások, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés útján való számolások

Alapozás

1. Hányféleképpen olvashatjuk ki a TÚRÓRUDI szót az alábbi táblázatból, ha mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk? (Keressünk általános képletet is, n betűs szavakra!)

T	Ú	R	Ó	R	U	D	I
Ú	R	Ó	R	U	D	I	
R	Ó	R	U	D	I		
Ó	R	U	D	I			
R	U	D	I				
U	D	I					
D	I						
I							

Megoldásvázlat

n betűs szó esetén $n-1$ lépést teszünk, minden lépés egy döntés hogy jobbra vagy lefele megyünk. Minden döntéssorozat egy különböző kiolvasás. Válasz tehát 2^{n-1}., esetünkben $2^7 = 128$.

2. Hányféleképpen tehetünk fel egy (8×8-as) sakktáblára

a) egy fekete és egy fehér bástyát; b) két fehér bástyát;
c) egy fekete, egy fehér és egy zöld bástyát; d) három fehér bástyát;
e) három fekete és négy fehér bástyát?

Megoldásvázlat

a) $64 \cdot 63$ döntés a fehér, majd a fekete helyéről; $64 \cdot 63/2$ (többszöri számolás: az a) feladathoz képest most minden itteni végeredményt kétszer számoltunk), vagy másképp: két hely kiválasztása 64 közül, vagyis $\binom{64}{2}$; c) $64 \cdot 63 \cdot 62$; d) $\frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3!} = \binom{64}{3}$; e) $\frac{64 \cdot \ldots \cdot 58}{3! \cdot 4!}$ (ha sorban leteszünk 7 bástyát, majd kinyitjuk a szemünket és látjuk, hogy 3 és 4 aznos szín van), másképp $\binom{64}{3}\binom{61}{4}$ (ha sorban kiváasztjuk a feketék majd ezután a fehérek helyeit), másképp $\binom{64}{7}\binom{7}{4}$ (ha először a 7 helyet válaszjuk ki, majd onnan a fehérek helyeit).

3. Hányféleképpen oszthatunk szét 8 szál (egyforma) tulipánt 5 különbözõ vázába? (A vázák közül bizonyosak akár üresek is maradhatnak.

Megoldásvázlat.

A kiosztásokhoz jelsorozatot rendelünk: virág: 0, osztási vonal: 1. Ha 8 viárgunk van, és 5 vázánk, akkor 4 osztási vonallal dolgozunk, az így képzett $8 + 4$ hosszú jelsorozatban az első elválasztó előtt, az 1.-2. közt, a 2.-3. közt, a 3.-4. közt, a 4. utáni virágok megfelelnek az 1. 2. 3. 4. és 5. vázába jutó virágoknak a kiosztásban. Ez a megfeleltetés világos hogy kölcs. egyértelmű. Emiatt a kiosztásaok száma $\binom{8+4}{8}$.

4. Hány olyan 1000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel?

Megoldásvázlat.

Szita-formulával kidobjuk a rosszakat (azaz azokat, amelyek oszthatóak valamely tiltott számmal). Legyen $H = \{1, 2, \ldots, 1000\}$, A_1 a kettővel, A_2 a hárommal, A_3 az öttel osztható, ezernél nem nagyobb pozitív egészek halmaza. Általában 1 és n között $\lfloor n/k \rfloor$ (ez az alsó egészrész jele) k-val osztható szám van, és pl. $A_1 \cap A_3$ a kettővel és öttel, azaz tízzel osztható számok halmaza. A szita-formula szerint a jó számok száma,

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= 1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 = 266.$$

5. Egy 2 méter oldalú, négyzet alakú céltáblába belelövünk 5 golyót. Mutassuk meg, hogy lesz két olyan lyuk, amelyek távolsága legfeljebb 1,5 méter! Állíthatunk-e ennél erõsebbet is?

Megoldásvázlat. Természetes módon fölosztva a táblát négy 1m×1m-es részre, észrevehetjük, hogy ezen kis négyzetek legtávolabbi pontjai (az átellenes sarkai) között a távolság $\sqrt{2} < 1,5$ méter. (Az, hogy ezek a legtávolabbiak, a Pithagorasz tételből azonnal látszik). Tehát ha két golyó ugyanabba a kis négyzetbe kerül, akkor a távolságuk biztosan nem több másfél méternél, tehát ezek megfelelnek skatulyáknak. A skatulya-elv szerint öt golyót négy skatulyába téve biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amibe legalább két golyó kerül, ami az észrevételünk fényében bizonyítja az állítást.
Megj: a bizonyítás mutatja, hogy lesz két olyan lyuk, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$ méter (ami persze a kitűzőttnél egy erősebb állítás). Ennél jobbat nem is mondhatunk, a négyzet négy sarka és a középpontja alkotta pontötös miatt.

6. Hányféleképpen olvashatjuk ki a MATEMATIKA szót az alábbi táblázatból, ha mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk? (Keressünk általános képletet is, tetszõleges $a \times b$ méretû táblázatra!)

M	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A

Megoldásvázlat.
a) Minden kiolvasásnál ötöt kell jobbra és négyet lefelé lépnünk, és az összes ilyen lépéssorozat jó kiolvasást ad; ezen lépéseknek $\frac{9!}{5!\cdot 4!} = \binom{9}{4}$-féle sorrendje van.
b) Vegyük észre, hogy minden mezőre vagy a fölötte, vagy a tőle balra levő mezőről érkezünk; így minden mezőre annyiféleképpen juthatunk, mint az előbb nevezett mezőkre való eljutási lehetőségek számának összege; ezzel kapunk egy ***rekurziót***: ha a táblának a bal fölső sarkából indulva egy $n \times k$-as szeletét vesszük, és annak a jobb alsó sarkába való séták számát $s(n,k)$-val jelöljük, akkor a fenti esetszétválasztás alapján $s(n,k) = s(n-1,k) + s(n,k-1)$. Persze az $s(n,1)$ és az $s(1,k)$ esetek triviálisak. Ez alapján kitöltve a táblázatot az eljutási lehetőségek számával (az (n,k) mezőre $s(n,k)$-t írunk) a válasz gyorsan számolható számszerűen. Ha észrevesszük, hogy a képzési szabály éppen az mint amit a Pascal háromszögben láttunk, akkor azt is látjuk, hogy a válasz $\binom{a+b-2}{a-1}$, amennyiben a és b az egy sorban ill. egy oszlopban levő betűk száma; mivel kezdetben is ennek felel meg a rekurzió: $a \times 1$, $1 \times b$-es táblazatoknak a $\binom{a-1}{0}$, $\binom{b-1}{b-1}$ érték felel meg.

Gyakorlás

7.* Karácsonykor 15 faktos diákunk között akarunk kiosztani összesen 24 (egyforma) kókuszos szaloncukrot. Hányféle kiosztás lehetséges, ha mindenkinek akarunk adni legalább 1-et? *(3. előadás utánra javasolt!)*

Megoldásvázlat:
Hasonló 3/3-hoz, csak először osszunk ki mindenkinek egy szaloncukrot.

8. Hány páros elemszámú részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak? Mennyi lehet az olyan részhalmazok száma ahol az elemek összege páros?

Megoldásvázlat:

Válasz első kérdésre: 2^{n-1}.

1. megoldás. Elég látni, hogy ez az összes részhalmaz számának fele, vagyis ugyanannyi mint a páratlnan részhalmazok száma. Ez innen jön: binomális tétel $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

2. megoldás. Az első $n-1$ elem bevételéről szabadon dönthetünk, erre 2^{n-1} lehetőségünk van (elemenként kettő: bevesszük vagy nem). Innen minden esetben egyféleképpen dönthetünk: ha páros sokat vettünk be, az n. elemet nem kérjük, ha páratlna sokat, akkor szükség lesz rá, hogy páros elemszámú részhalmazt nyerjünk.

Válasz a második kérdésre: használhatjuk a 2. megoldás gondolatmenetét, de az '1' (vagy egy páratlan elem) legyen az az elem, amit a végére tartogatunk. A többi elem halmazának összes részhalmazát egyféleképpen lehet jól befejezni, úgy, hoyg az elemösszeg páros legyen.

9.* Hány négyzetszám között van biztosan kettő, amelyek különbsége osztható
a) 3-mal b) 4-gyel c) 8-cal?

Megoldásvázlat:

Skatulya elvet használunk. Négyzetszámok adott számmal vett lehetséges osztási maradékait kell meghatározni tudni hozzá.

10. 9 látszólag egyforma érme közül az egyik hamis: könnyebb a többinél. Hány méréssel lehet a hamis érmét egy kétkarú mérleg segítségével megtalálni? Mi a helyzet, ha 20 érme van, és köztük szintén egy a hamis?

Megoldásvázlat.

Itt egy mérésnél két azonos méretű kupacot kell tennünk a mérleg két karjára. A kimenetel alapján megtudjuk, hogy a könnyebb súly a bal serpenyőben, a jobb serpenyőben, vagy a mérlegre nem helyezett súlyok között van-e. Azaz egy méréssel a harmadára tudjuk csökkenteni a szóba jövő súlyok halmazát. (Peches esetben a három kupac közül a legnagyobban van a súly, tehát egy méréssel tényleg csak harmadolni tudunk). Így n súlyból $\lceil \log_3 n \rceil$ méréssel tudjuk kiválasztani a könnyebbet harmadolással. Tehát az **a)** feladatnál kettő, a **b)**-nél három mérés szükséges és elegendő. (Az előbbinél tegyünk három-három súlyt a mérleg két serpenyőjébe, így kapunk egy három súlyból álló kupacot, amiben van a könnyebb. Ebből kettőt összemérve megtaláljuk a hamis súlyt. Az utóbbinál kilenc-kilenc súlyt mérjünk össze, így egy mérés után az előző feladatnál tartunk.)

Kitekintés

11. Mutassuk meg, hogy bármely n egymást követõ pozitív egész szám szorzata osztható $n!$-sal!

Megoldásvázlat.

Elég belátni, hogy minden $N \geq n$ egész számra igaz az, hogy $\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots(N-n+1)}{n!}$ egész szám. De hát hogyne lenne az, hiszen ez nem más, mint $\binom{N}{n}$.

12. 17 doboz mindegyikében piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve mind a négyféle golyóból páros sok van!

Megoldásvázlat.

Rendeljünk hozzá minden dobozhoz négy számot, amelyik mindegyike 0 vagy 1, és a dobozban lévõ, különbözõ színû golyók számának 2-es maradékát jelölik. Ha például az egyik dobozban 5 piros, 12 kék, 34 sárga és 27 zöld golyó van, akkor ehhez a dobozhoz az $1, 0, 0, 1$ számnégyest rendeljük. A skatulyaelv szerint, mivel 16 különbözõ számnégyes létezik, de 17 dobozunk van, így lesz két egyforma számnégyes. Ekkor a hozzájuk tartozó két dobozban együttesen minden színbõl páros sok darab golyó lesz.

13. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex n-szög átlóinak?

Megoldásvázlat.

Minden metszéspont metsző átlópárból jön létre (esetleg előfordulhat, hogy több átló is metszi egymást ugyanabban a pontban). Tehát a metsző átlópárokat szeretnénk megszámolni. Minden csúcsnégyes pontosan egy metsző átlópárt ad meg, ráadásul itt a megfeleltetés kölcsönös. Tehát a metszéspontok maximális száma $\binom{n}{4}$.

14. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 25 fős első osztályban van két diák, akinek a születésnapja egyazon napra esik? Feltételezzük, hogy minden diák egymástól függetlenül születik az év bármely napján, és hogy a közoktatási törvény szerint az évkezdés napján mindenki betöltötte a 6 évet, de senki sem 7 éves még.

15.* Igazoljuk, hogy ha $a \leq b$ pozitív egészek, akkor $2^a \leq \binom{a+b}{b} \leq 2^{a+b}$ teljesül. (Segítség: az alapozó feladatok eredményei hasznosíthatóak.