Véges matematika I. tanári gyakorlat

4. feladatsor - 2023. október 3.

Gyakorlatvezető: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek:
Szita-formula Tetszőleges H alaphalmaz és $A_1, ..., A_n \subseteq H$ részhalmazokra azon elemek száma, melyek egyik A_i-ben sincsenek benne

$$|H| - (|A_1| + \cdots + |A_n|) + (|A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|) - \cdots + (-1)^k(|A_1 \cap \cdots \cap A_k| + \cdots) + \cdots +$$

$$+(-1)^n|A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Binomiális tétel $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$, másképp

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

Alapozás

1. Mennyi az együtthatója x^6y^6-nak és x^4y^2-nek az $(x+3y)^6$ kifejezés kifejtésében? Mennyi az együtthatója $x^4y^2z^3$-nek az $(x+y+z)^9$ kifejezés kifejtésében?

2. Egy osztályba 35 gyerek jár. Mindenki 3-féle nyelvóra közül választhat: angol, francia és német. 4 tanuló választotta csak az angolt, 1 csak a franciát, 6 csak a németet. 3 tanuló választotta az angolt és a franciát (de a németet nem), 2 tanuló az angolt és a németet (de a franciát nem), 4 a franciát és a németet (de az angolt nem). Végül 5 gyerek tanulja mind a három nyelvet. Hányan nem járnak nyelvórára?

3. Hányféleképpen olvashatjuk ki a TÚRÓRUDI szót az alábbi táblázatból, ha mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk? (Keressünk általános képletet is, n betűs szavakra, ahol a 3. sor 3. pozíciója van kiikszelve!)

T	Ú	R	Ó	R	U	D	I
Ú	R	Ó	R	U	D	I	
R	Ó	X	U	D	I		
Ó	R	U	D	I			
R	U	D	I				
U	D	I					
D	I						
I							

4. a) Hányféleképpen oszthatunk ki 10 diák között 15 kisötöst, ha mindenki legalább egyet kap?,
b) Mi a helyzet, ha nem kisötösöket, hanem különböző könyveket osztunk ki, szintén 15-öt?

5. Tetszõleges $2 \le n$ pozitív egészre $\varphi(n)$ jelöli az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek számát. Számítsuk ki $\varphi(n)$ értékét $n = 5, 8, 10, 20, 60$ esetén.

6. a) Igazoljuk kombinatorikai úton, kétszeres leszámolással az alábbi összefüggéseket:

$$a) \quad \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \text{ ha } \; k \le m \le n,$$

$$b) \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

7. Hányféleképpen tehetünk be 30 szál virágot 15 különböző színű vázába, ha

a) a virágok egyformák; **b*)** a virágok egyformák és minden vázába kell jusson legalább egy;
c) a virágok különbözők; **d)** a virágok különbözők és minden vázába kell jusson legalább egy?

8. Igaz-e, hogy létezik két olyan különbözõ prímszám, amelynek azonos az utolsó 2022 számjegye?

9. Egy 8 fõs baráti összejövetelen egyesek kézfogással köszöntötték egymást. Lehetséges-e, hogy minden jelenlévõ különbözõ számú emberrel fogott kezet?

Gyakorlás

10. Egy 52 lapos franciakártya-csomagot szétosztunk 4 játékos között. Hány olyan leosztás van, amelyben minden játékosnak jut legalább egy kõr?

11.* A Számzárgyár Bt számkódos biciklizárakat gyárt. Minden kód négy darab, 0 és 9 közti számból áll. Mivel az igazgató kedvenc száma a 4, ezért négy héten keresztül csupa olyan zárat gyártanak, melynek kódjában szerepel a négyes: az első héten azokat, melyek kódjában az első szám 4 (az összes ilyenből pontosan egyet), a második héten azokat, melyek kódjában a második szám 4 (az összes ilyenből pontosan egyet), stb, hasonlóan a 3. és 4. héten. a) Hány zárat gyártottak a négy hét alatt összesen?
b) Hány 1234 kódú zárat gyártottak? c) És 0449 kódút?
d) És 4444 kódút? e) Hány különböző kódú zárat gyártottak?

12. Egy kerek asztal körül n ember ül. Hányféleképpen választhatunk ki közülük 3, páronként nem szomszédosat?

13.* Adott 5 rácspont a síkon. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük két olyan, amelyek által meghatározott szakasz felezõpontja is rácspont! Igaz-e az állítás 4 rácspontra?

14. a) Egy 10×10 méteres kertbe szeretnénk minél több gyümölcsfát ültetni oly módon, hogy bármely kettõ távolsága legalább 5m legyen. Hányat ültethetünk be?
b) Egy 7×7 méteres kertbe minél több rózsabokrot szeretnénk beültetni oly módon, hogy bármely kettõ távolsága legalább 1m legyen. Hányat ültethetünk be?

15. Legfeljebb hány pozitív egész számot adhatunk meg úgy, hogy semelyik kettõ összege és különbsége se legyen osztható 10-zel?

16. Lássuk be a következõ összefüggést:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

Kitekintés

17. Van 20 külsõre teljesen egyforma súlyunk, amelyek közül 19 darab 100 dkg-os, egy viszont 101 dkg-os. Határozzuk meg minél kevesebb méréssel a nehezebb súlyt egykarú („kijelzõs") mérleggel! Ennyi méréssel legfeljebb hány súly közül tudjuk biztosan kiválasztani a nehezebbet?

18. Két játékos a következõt játssza: az 1-rõl indulnak, és az aktuális számot felváltva növelik egy pozitív egésszel. Az elsõ játékos mindig 1 és 10 közötti, a második játékos 1 és 8 közötti számot adhat hozzá az aktuális értékhez. (Tehát $\{1, 2, \ldots 10\}$-ből és $\{1, 2, \ldots 8\}$-ból választanak.) Az nyer, aki eléri a 100-at. Melyik játékosnak van nyerõ stratégiája? Hogyan?

19.* Mutassuk meg, hogy tetszõleges $1 < m$ egész számra a Fibonacci-sorozat tagjainak m-mel vett osztási maradékai periodikus sorozatot alkotnak!

20.* Értelmezzük szita-formula segítségével a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$$

kifejezést, és mondjuk meg hogy mennyi az előjeles összeg! Megj: valahonnan amúgy tudjuk, hogy mennyi az összeg; honnan is?