Véges matematika I. tanári gyakorlat

4. feladatsor , megoldásvázlatok

Gyakorlatvezető: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek:
Szita-formula Tetszőleges H alaphalmaz és $A_1, ..., A_n \subseteq H$ részhalmazokra azon elemek száma, melyek egyik A_i-ben sincsenek benne

$$|H| - (|A_1| + \cdots + |A_n|) + (|A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|) - \cdots + (-1)^k(|A_1 \cap \cdots \cap A_k| + \cdots) + \cdots +$$

$$+(-1)^n|A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Binomiális tétel $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$, másképp

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

Alapozás

1. Mennyi az együtthatója x^6y^6-nak és x^4y^2-nek az $(x+3y)^6$ kifejezés kifejtésében? Mennyi az együtthatója $x^4y^2z^3$-nek az $(x+y+z)^9$ kifejezés kifejtésében?

Megoldásvázlat.
x^6y^6-nak 0 és x^4y^2-nek $\binom{6}{4} \cdot 3^2$, a binomiális tétel alapján.
$x^4y^2z^3$ ehatója $\binom{9}{4}\binom{5}{2}$. (Kiválasztjuk x-et tartalmazó tényezőket, majd az y-t tartalmazó tényezőket, a maradék 3 tényezőből jönnek a z-k.)

2. Egy osztályba 35 gyerek jár. Mindenki 3-féle nyelvóra közül választhat: angol, francia és német. 4 tanuló választotta csak az angolt, 1 csak a franciát, 6 csak a németet. 3 tanuló választotta az angolt és a franciát (de a németet nem), 2 tanuló az angolt és a németet (de a franciát nem), 4 a franciát és a németet (de az angolt nem). Végül 5 gyerek tanulja mind a három nyelvet. Hányan nem járnak nyelvórára?

Megoldásvázlat.
Ez most az az eset, amikor a diszjunkt csoportokba vannak osztva a gyerekek. Tehát a keresett érték $35 - 4 - 1 - 6 - 3 - 2 - 4 - 5$.

3. Hányféleképpen olvashatjuk ki a TÚRÓRUDI szót az alábbi táblázatból, ha mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk? (Keressünk általános képletet is, n betűs szavakra, ahol a 3. sor 3. pozíciója van kiikszelve!)

T	Ú	R	Ó	R	U	D	I
Ú	R	Ó	R	U	D	I	
R	Ó	X	U	D	I		
Ó	R	U	D	I			
R	U	D	I				
U	D	I					
D	I						
I							

Megoldásvázlat.
Összes mínusz rossz. Összes: 2^7. Rossz: $\binom{4}{2} \cdot 2^3$, mert X-ig 4 lépés teszünk, amiből adott hogy 2 le, 2 jobbra; X után 3 tetszőleges lépés a le/jobbra közül.

4. a) Hányféleképpen oszthatunk ki 10 diák között 15 kisötöst, ha mindenki legalább egyet kap?,
b) Mi a helyzet, ha nem kisötösöket, hanem különböző könyveket osztunk ki, szintén 15-öt?

Megoldásvázlat.
a) megfeleltetés gombócnak (kisötös) és pálcikának (elválasztóvonal a 10 gyerek közt), miután előre kiosztunk

mindenkinek 1-et; ezek tetszőleges sorrendjeivel kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk a kiosztásokkal. Ez így $\binom{5+9}{9}$ lehetőséget ad.
b) Szita lesz. Rossz esetből több fajta is van: $A_i (i = 1 \ldots 10)$ esetek halmaza az, ha az i. gyerek nem kap. Összes eset, ha nem figyelünk arra hogy ki mennyit kap, csak kiosztjuk mind: 10^{15}. $|A_i| = 9^{15}$, mert a maradék 9 között tetszőleges kiosztésokat mind megszámoljuk itt egyszer. Hasonlóképpen az összes olyan eset amikor k rögzített gyerek nem kap: $(10-k)^{15}$. Innen a szita formula szerint a válasz $\sum_{j=0}^{10}(-1)^j\binom{10}{j}(10-j)^{15}$.

5. Tetszõleges $2 \le n$ pozitív egészre $\varphi(n)$ jelöli az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek számát. Számítsuk ki $\varphi(n)$ értékét $n = 5, 8, 10, 20, 60$ esetén.

Megoldásvázlat.

$\varphi(5) = 4$, hiszen minden 1 és 4 közötti szám relatív prím az 5-höz.
$\varphi(8) = 8 - 4 = 4$, hiszen az 1 és 8 közötti számok közül a 4 páros nem jó, a többi igen.
$\varphi(10) = 10 - 5 - 2 + 1 = 4$, itt a szita-módszert alkalmaztuk: a 10 lehetséges szám közül kihúztuk a 2-vel oszthatókat (5 db), majd az 5-tel oszthatókat (2 db), végül 1-et hozzáadtunk az eredményhez, mivel a 10-et (2-vel és 5-tel is osztható) kétszer húztuk ki.
$\varphi(20) = 20 - 10 - 4 + 2 = 8$, ugyanis a 20 lehetséges szám közül kihúzzuk a 10 db 2-vel oszthatót és a 4 db 5-tel oszthatót, majd a kétszer kihúzott 2 db 10-zel osztható számot korrigáljuk.
$\varphi(60) = 60 - 30 - 20 - 12 + 10 + 6 + 4 - 2 = 16$, itt a 60-ból levonjuk a 2-vel, 3-mal és 5-tel oszthatók számát, majd hozzáadjuk a $2 \cdot 3$-mal, $2 \cdot 5$-tel és $3 \cdot 5$-tel oszthatók számát, végül újra levonjuk a $2 \cdot 3 \cdot 5$-tel oszthatók számát.
A fentiek alapján $\varphi(n)$ általános képlete: amennyiben az n szám különbözõ prímosztói $p_1, p_2, \ldots, p_k$, akkor $\varphi(n) = n - \sum\limits_{p_i} \frac{n}{p_i} + \sum\limits_{p_i,p_j} \frac{n}{p_i \cdot p_j} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{n}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_k}$, ahol az összegzést váltakozó elõjellel, egyre több prímtényezõ szorzatával végezzük.

6. a) Igazoljuk kombinatorikai úton, kétszeres leszámolással az alábbi összefüggéseket:

$$a) \quad \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \text{ ha } \ k \le m \le n,$$

$$b) \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Megoldásvázlat.

a) Kétféle leszámlálás. Kérdés: hányféleképpen lehet n ember között kiválasztani m-et akinek adunk sapkát, és a sapkások közül kt aki még sálat is kap? Pont ezt számolja a baloldal. A jobboldal először a sapka-sálasokat választja ki, a maradékból a csak sapkásokat.
Lehet algebrailag is, mese nélkül - kiírva a binom együtthatók hányados alakját.
b) Válasszunk ki az $\{1, 2, 3, \ldots n+1\}$ halmazból $k+1$ darabot. A jobboldal egyértelmű hogy ezt számolja. A baloldalon esetszétválasztás van aszerint, hogy melyik a kiválasztott elemek közül a legnagyobb. Ha ez a $k+t$, akkor még $\binom{k+t-1}{k}$ féleképpen vehetünk további k-t a nála kisebbek közül.
Vegyük észre, hogy ezt indukcióval már tanultunk (zokni/hokiütő szabály a Pascal háromszögben)

7. Hányféleképpen tehetünk be 30 szál virágot 15 különböző színű vázába, ha
a) a virágok egyformák; **b*)** a virágok egyformák és minden vázába kell jusson legalább egy;
c) a virágok különbözők; **d)** a virágok különbözők és minden vázába kell jusson legalább egy?

Megoldásvázlat.

Az **a)** és **c)** (és hasonlóan a **b)** és **d)**) részfeladatok között az a különbség, hogy az előbbinél csak azt kell megmondani, hogy melyik vázába mennyi virág kerüljön (hiszen egyformák), az utóbbinál azonban az is számít, mely virágok kerülnek az adott vázába.
a) Ismétléses kombináció (30 virág, 9 elválasztójel), tehát $\binom{39}{30}$.
b) Először minden vázába tegyünk egy-egy virágot (mivel egyformák, lényegtelen, hogy mely 10 virágot osztjuk ki itt), majd a maradék 20 virágot a **a)** feladat szellemében kiosztjuk. Tehát a megoldás $\binom{29}{10}$.
c) Virágonként 10 döntési lehetőségünk van, tehát 10^{30}.
d) (Itt nem volna jó, ha első körben minden vázába tennénk egy-egy virágot, mert a végeredményben nem tudjuk megkülönböztetni az „első körös” virágokat a később kiosztottaktól, míg a számolt döntési sorozatokban ez dokumentálva volna.) Az összes lehetséges kiosztás halmazát jelölje H, és legyen A_i azon kiosztások

halmaza, amelyeknél az i. váza üresen marad, $1 \le i \le 10$. (Tehát pl az A_5-ben levő kiosztások azért rosszak, mert az ötödik váza üresen marad.) A jó kiosztások halmaza tehát $H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10})$. $|H| = 10^{30}$ (lásd **c)**). $|A_i| = 9^{30}$ (függetlenül az i-től), hiszen virágonként 9-féleképpen dönthetünk (az i. váza üresen kell maradjon). $|A_i \cap A_j| = 8^{30}$, mert jelenleg két váza tiltott (az i. és a j.). Hasonlóképpen egy k-as metszetnek $(10-k)^{30}$ eleme van (k váza tiltott). Általában k-as metszetből $\binom{10}{k}$ darab van, ezek elemszáma mind ugyanakkora. A szita-formula szerint tehát

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10})| = 10^{30} - 10 \cdot 9^{30} + \binom{10}{2} \cdot 8^{30} - \ldots + (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{30} + \ldots + (-1)^{10} \binom{10}{10} \cdot 0^{30}$$

$$= 10^{30} - \sum_{k=1}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{30} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{30}.$$

Kiegészítő magyarázat („mese”): a szummás alakok csak tömörítések, a válasz teljes értékű azok nélkül is. Vegyük észre, hogy az utolsó tag ($k = 10$-re) persze nulla, hiszen nincs olyan kiosztás, amelynél mind a 10 váza üresen maradna. A $k = 0$ pedig annak felel meg, amikor nincs tiltott váza, így nem meglepő, hogy $(-1)^0 \binom{10}{0} \cdot (10-0)^{30} = 10^{30}$, pont az összes kiosztások számát kapjuk.

8. Igaz-e, hogy létezik két olyan különbözõ prímszám, amelynek azonos az utolsó 2023 számjegye?

Megoldásvázlat.

Végtelen sok prímszám van, szóval azt is tudjuk hogy van legalább $2^{2023} + 1$. A lehetséges végződések, vagyis utolsó 2023-as számjegysorozatok száma – ha nagyvonalúak vagyunk és nem foglalkozunk azzal, hogy prímek nem végződhetnek akárhogy – 10^{2023}. Skatulya-elv szerint ekkor lesz olyan skatulya (végződés) ami legalább kétszer előfordul.

9. Egy 8 fõs baráti összejövetelen egyesek kézfogással köszöntötték egymást. Lehetséges-e, hogy minden jelenlévõ különbözõ számú emberrel fogott kezet?

Megoldásvázlat.

Az egyes emberek kézfogásainak száma 0-tól 7-ig vehet fel egész értéket. Ez nyolc lehetőség. Ha indirekt módon feltesszük, hogy lehetséges volna hogy mindenki különböző számú alkalommal fog kezet, akkor minden érték valóban valakinek a kézfogásszáma lenne 0-tól 7-ig. De ez lehetetlen, mert 0 kézfogós ember (aki senkivel sem fog kezet) és 7 kézfogós ember (aki mindnekivel kezet fog) egyszerre nem lehet.

Gyakorlás

10. Egy 52 lapos franciakártya-csomagot szétosztunk 4 játékos között. Hány olyan leosztás van, amelyben minden játékosnak jut legalább egy kõr?

Megoldásvázlat.

Mese egy ROSSZ MEGOLDÁSRÓL: Itt sem követjük el a típushibát, miszerint minden játékosnak adnunk egy-egy kőrt a biztonság kedvéért (így négy kitüntetett kőrt osztanánk ki az elején, amit viszont a véeredményt nézve valójában nem tudunk megkülönböztetni a kilenc további kőrtől, ld. virágos-vázás feladat.

JÓ MEGOLDÁS: szitálunk. Az alaphalmaz, H, legyen az összes kiosztások halmaza; ezen belül négy rossz halmazunk van: $A_i \subset H$ legyen azon kiosztások halmaza, ahol az i. játékos nem kap kőrt $(1 \le i \le 4)$. (***Nagyon fontos!*** *Az A_1 halmazban* ***nem*** *azok a leosztások vannak, amikor egy játékos nem kap kőrt! És az A_2-ben sem azok, amelyekben két játékos nem kap kőrt. Hanem az A_1-ben azok, melyekben az 1-es játékosnak (személy szerint) nem jut kőr, az A_2-ben azok, ahol a 2-es játékosnak nem jut kőr.*) Így pl. $|A_3| = \binom{39}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}$, mert a harmadik játékosnak a 39 nem kőr lapból adunk 13-at, a többieknek a maradékot tetszőlegesen kiosztjuk. Bármelyik kettes metszet elemszáma hasonló okokból $\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{26}{13}$ hiszen a 39 nemkőr lapból osztunk először 13-at, majd a maradék 26 nem kőr lapból ismét 13-at, végül a megmaradt lapoból kiveszünk a soron következő játákosnak 13-at. Ugyanígy minden hármas metszet mérete $\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

A szita-formulát alkalmazva

$$|H \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_4)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_3 \cap A_4|) -$$

$$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$= \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} - 4 \cdot \binom{39}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} + \binom{4}{2}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{26}{13} - \binom{4}{3}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}\binom{13}{13} + 0.$$

11.* A Számzárgyár Bt számkódos biciklizárakat gyárt. Minden kód négy darab, 0 és 9 közti számból áll. Mivel az igazgató kedvenc száma a 4, ezért négy héten keresztül csupa olyan zárat gyártanak, melynek kódjában szerepel a négyes: az első héten azokat, melyek kódjában az első szám 4 (az összes ilyenből pontosan egyet), a második héten azokat, melyek kódjában a második szám 4 (az összes ilyenből pontosan egyet), stb, hasonlóan a 3. és 4. héten. a) Hány zárat gyártottak a négy hét alatt összesen?

b) Hány 1234 kódú zárat gyártottak? c) És 0449 kódút?

d) És 4444 kódút? e) Hány különböző kódú zárat gyártottak?

Megoldásvázlat.

a) Minden héten 10^3 zárat gyártottak, összesen tehát 4000-et.

b) Ezt a negyedik héten gyártották le pontosan egyszer, tehát egyet.

c) Ezt a második és a harmadik héten is legyártották, tehát kettőt.

d) Négyet.

e) Dobjuk ki a rosszat! Ha elhagyjuk a „szerepel benne a 4-es” megkötést, 10^4-féle kódú zár van. Ebből rossz, amiben nincsen 4-es, melyből 9^4 darab van. A válasz tehát $10^4 - 9^4$ (ami 3439).

e) másképp.

Számolhatjuk úgy is, hogy hetenként hány új zárat gyártottak le. Első héten 10^3 zárat gyártottak; ezeknek az első kódjegye 4-es. A második héten új zárak azok, melyeknek az első kódjegye nem négyes (nem volt az első héten) és a második jegye négyes (a 2. héten legyártják): ez $9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10$ darab. Hasonlóan a 3. héten új kódúak azok, ahol az első két kódjegy nem négyes, de a harmadik igen: ilyenből $9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 10$ darab van. Negyedik héten 9^3 új zár; összesen $10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9^2 \cdot 10 + 9^3$.

e) megint másképp A gyárban $4 \cdot 10^3$ zárat gyártottak. Kétszer gyártották azokat, melyekben pontosan két db 4-es van; ilyen kódú zárból $\binom{4}{2} \cdot 9^2$ darab van. Háromszor gyártották azokat, melyekben pontosan három db 4-es van; ilyen kódú zárból $\binom{4}{3} \cdot 9$ darab van. Négyszer gyártották le a 4444 kódú zárat. Mivel mindet csak egyszer kéne számolni, dobáljunk ki minden típusból annyit, hogy csak egy maradjon; így a válasz $4 \cdot 10^3 - \binom{4}{2} \cdot 9^2 - 2 \cdot \binom{4}{3} \cdot 9 - 3 \cdot 1$.

12. Egy kerek asztal körül n ember ül. Hányféleképpen választhatunk ki közülük 3, páronként nem szomszédosat?

Megoldásvázlat.

Feltesszük hogy $n > 3$, különben nyilván 0 a válasz.

Vonjuk ki az összes rossz esetet az összes esetből, mégpedig egyszer.

Összes lehetséges kiválasztása 3 embernek: $\binom{n}{3}$.

Rossz egy kiválasztás, ha van benne szomszédos, pl az i. és $i+1$. helyen is ülnek, valamelyik i-re. (Ha $i = n$, akkor az $i+1$. jelentse az 1. helyet). Így az i. helyet n-féleképp választhatjuk, az i. és $i+1$. heélyen kívüli harmadik embert pedig $n-2$-féleképp.

De hopp, azokat a rossz eseteket kétszer számoltuk, ahol hárman is egymás mellet ülnek, hiszen közülük két szomszéd párt is választhattunk. A hármas szomszádpárok száma n, őket a rossz esetek számából levonjuk, hogy midnen rossz esetet egyszer számoljunk. Válasz:

$$\binom{n}{3} - n(n-2) + n.$$

13.* Adott 5 rácspont a síkon. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük két olyan, amelyek által meghatározott szakasz felezõpontja is rácspont! Igaz-e az állítás 4 rácspontra?

Megoldásvázlat.

Nézzük csak a rácspontok koordinátáinak paritását. Ezek összesen 4-félék lehetnek (ps, ptn), (ps, ps), (ptn, ps), (ptn, ptn). Ezek szerint 5 rácspontot választva lesz két olyan a skatulya-elv szerint, amelynek a koordinátaparotásai egyeznek. Erre a két rácspontra teljesül hogy felezőpontjuk is rácspont.

14. a) Egy 10×10 méteres kertbe szeretnénk minél több gyümölcsfát ültetni oly módon, hogy bármely kettõ távolsága legalább 5m legyen. Hányat ültethetünk be?

b) Egy 7×7 méteres kertbe minél több rózsabokrot szeretnénk beültetni oly módon, hogy bármely kettõ távolsága legalább 1m legyen. Hányat ültethetünk be?

Megoldásvázlat.

a) 9-et lehet, csúcsokba, oldalfelezőpontokba és középpontba. Többet nem: ha behúzzuk a harmadolópontokon átmenő, oldalakkal párhuzamos egyeneseket, akkor 9 tartományt kapunk, és egyik tartományba sem

kerülhetne 2 gyömölcsfa, mert azok közeliek lennének.
b) Vonzó volna így indulni: a legrosszabb eset az, ha a rózsatövek szépen az összes rácspontba foglalnak helyet (így pl. egy oldal mentén 8-at látunk), összesen 8×8 ültethető így le. Többet nyilván nem lehet ehhez hozzávenni. Csakhogy nem ez a *legrosszabb eset* - bármit is jelentsen ez! Lehet háromszögrács szerint is ültetni, akkor az alsó sorban 8 rózsa lesz, majd 7, és innentől ezek váltakoznak, viszont a sorok távolsága $\frac{\sqrt{3}}{2}$, emiatt 9 sor is elfér, összesen $58 + 47 = 68$ tővel!
(azt itt nem bizonyítjuk hogy ez a legtöbb elérhető, kissé körülményes lenne)

15. Legfeljebb hány pozitív egész számot adhatunk meg úgy, hogy semelyik kettõ összege és különbsége se legyen osztható 10-zel?

Megoldásvázlat.
6 kiválasztható: $10, 11, 12, 13, 14, 15$.
Több nem, mert 10-es maradék szerint 6 skatulyába sorolhatjuk a számokat: $\{0\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$ maradékot adó számok 10-zel osztva. Ha bármelyik skatulyába beleesne kettő szám, akkor azok összege vagy különbsége 10-zel osztható számot adna.

16. Lássuk be a következõ összefüggést:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

Megoldásvázlat.
A jobboldal megmondja, hányféeképp választhatunk ki n fiúból és m lányból k embert. A baloldal aszerint bont esetekre, hogy fiúk közül hányat választunk.

Kitekintés

17. Van 20 külsõre teljesen egyforma súlyunk, amelyek közül 19 darab 100 dkg-os, egy viszont 101 dkg-os. Határozzuk meg minél kevesebb méréssel a nehezebb súlyt egykarú („kijelzõs") mérleggel! Ennyi méréssel legfeljebb hány súly közül tudjuk biztosan kiválasztani a nehezebbet?

Megoldásvázlat.
Egy méréssel mindig kétféle lehetséges súlyeredményből kapunk egy választ. Emiatt 4 mérés még kevés, mert 2^4 válaszsorozatot eredményezne a mérési stratégiánk; de ennyi válaszsorozat nem tud megkülönböztetni 20 súlyt. (V.ö. skatulya-elv, 16 skatulya, 20 súly).
5 mérés könnyen ellenőrízhetően elegendő: mindig felezzük meg a szóbajövő súlyokat két egyforma csoportba osztva, és az egyik felét tegyük fel. Aszerint hogy a súlyok számának 100-szorosa lesz-e a mért érték (dkg-ban), el tudjuk dönteni hogy a mértek között van a hibás súly, vagy a megmaradtak között.

18. Két játékos a következõt játssza: az 1-rõl indulnak, és az aktuális számot felváltva növelik egy pozitív egésszel. Az elsõ játékos mindig 1 és 10 közötti, a második játékos 1 és 8 közötti számot adhat hozzá az aktuális értékhez. (Tehát $\{1, 2, \ldots 10\}$-ből és $\{1, 2, \ldots 8\}$-ból választanak.) Az nyer, aki eléri a 100-at. Melyik játékosnak van nyerõ stratégiája? Hogyan?

Megoldásvázlat.
Az első játékos lép egyet a 10-re, majd: játszhat azzal a stratégiával, hogy ha előtte a 2. játékos x-szel növelt, akkor ő $9 - x$-szel fog. Így a második játékos 9-cel osztva mindig azonos (történetesen) 1-es maradékot adó számról indul lép tovább. Emiatt nem lesz esélye ugyanilyen típusú számra lépnie, történetesen a 100-ra se.

19.* Mutassuk meg, hogy tetszõleges $1 < m$ egész számra a Fibonacci-sorozat tagjainak m-mel vett osztási maradékai periodikus sorozatot alkotnak!

20.* Értelmezzük szita-formula segítségével a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$$

kifejezést, és mondjuk meg hogy mennyi az előjeles összeg! Megj: valahonnan amúgy tudjuk, hogy mennyi az összeg; honnan is?

Megoldásvázlat.

Az összeget azonnal felismerjük, mert a binomiális tétel ezt kiadja: $(2 + (-1))^n = 1$.

Azért hasonlít a szitára, mert szitás feladatként értelmezhető: mondjuk meg, hány n hosszú 0/1 sorozat van, ahol egyik koordináta sem 1.

Ekkor lehetnek azok a rossz esetek A_i halmazai, $i = 1 \dots n$, hogy az i. koordináta 1. Világos, hogyha $n - k$ rossz eset teljesül, akkor éppen 2^k-féle sorozat jön még szóba, a maradék k koordináta tetszőleges kitöltése alapján.