VM fejezetek, Bizonyítási Módszerek

1. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.09.16.

Matematikai állítások helyességét bizonyítással igazoljuk. A bizonyítás igénye egészen az ókori görögökig nyúlik vissza (Euklidesz: Elemek. Kr.e. ~ 300). *Iskolai környezetben* minél fiatalabbak, annél inkább fontos lehet a megfelelő szemlélet és módszeresség átadása, és minél nagyobbak a diákok (gimnázium) annál jobban előtérbe kerül a szabatos érvelés és levezetés, a következtetések láncolatának bemutatása.

1. Direkt bizonyítás

Elméleti összefoglaló

- Kiindulunk alapigazságokból (axiómák), illetve korábban már igazolt (vagy igaznak tekintett) állításokból
- helyes logikai következtetéseket hajtunk végre
- ezek eredményeként a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Példa 1. Az $(a+b)^{10}$ algebrai kifejezésben az $a^2 \cdot b^8$ tag együtthatója 45.

Bizonyítás.

$$(a+b)^{10} = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b),$$

ahol 10 tényezőnek vesszük a szorzatát. Ahhoz, hogy a-t 2 kitevővel kapjuk meg, a tényezők közül ki kell választanunk 2-t ahol az $(a+b)$ összegből a-t választjuk és a maradék nyolc 8 tényezőben pedig b-t kell választanunk.
10-ből 2 tényező sorrend nélküli kiválasztásainak száma $10 \cdot 9/2$, mivel az első kiválasztott 10 helyről érkezhet, a második a maradék 9 hely egyikéről, azonban így minden párt kétszer is megszámoltunk. $10 \cdot 9/2 = 45$. $\square$

2. Indirekt módszer (reductio ad absurdum)

Elméleti összefoglaló

- Van egy igaznak vélt állításunk. **Feltesszük**, hogy a bizonyítandó állítás **nem igaz**.
- ebből kiindulva helyes következtetésekkel ellentmondásra jutunk a feltételeinkkel.
- következmény: a kiinduló feltevés volt téves, vagyis a bizonyítandó állítás valójában igaz.

Példa 2. Vegyük egy négyzet alapú gúla élhálóját. Lerajzolható-e úgy, hogy minden élet egyszer rajzoljuk meg és nem emeljük fel a ceruzánkat?

Bizonyítás. Tegyük fel hogy lehetséges, és mutassuk meg, hogy ez ellentmondásra vezet! Vizsgáljuk meg egy lehetséges lerajzolást. Ebben minden alkalommal, amikor egy csúcshoz beérkeztünk, egy másik élen továbbhaladunk. Eszerint minden csúcs esetén a belőle induló élek száma páros lesz; kivéve esetleg az indulási csúcsot és az érkezési csúcsot. A mi élhálónkban azonban 4 olyan csúcs is van, amiből páratlan sok él indul ki: ellentmondásra jutottunk azzal a feltételezéssel hogy lerajzolhatjuk a szabály szerint. $\square$

3. Teljes Indukció

Motivációs feladat 3. Az egységoldalú szabályos háromszöget felbontanánk egyenlő területű kis szabályos háromszögekre, oldalpárhuzamos egyenesekkel. Mennyi kis háromszög keletkezik, ha k sorba rendeződnek a háromszögeink, vagyis $k-1$ adott oldallal párhuzamos egyenest használunk? (Lásd ÁBRA!)

Nézzük meg kis k értékek esetén, hogy mi a válasz. Jelöljük a k értéktől függő választ, a kis háromszögek számát $f(k)$-val.
$k = 1 \to f(1) = 1$
$k = 2 \to f(2) = 4$
$k = 3 \to f(3) = 9$.
Sejtésünk támadhat: $f(k) = k^2$ igaznak tűnik!
Technikai okból könnyebb még "többet" bizonyítani:

1. Állítás. *A k. sorban $2k-1$ kis háromszög van, és a k. sorig összegezve k^2 kis háromszöget kapunk.*

Bizonyítás. $k = 1$-re ez az állítás igaz.
Belátjuk, hogy ha valamely k értékre igaz, akkor igaz $k+1$-re is.
tekintsük most azt a felosztását a szabályos háromszögnek, ahol a kisháromszögek $k+1$ sorba rendeződnek. Ha a legalsó osztóegyenes feletti részt tekintjük, visszakapjuk a k sorba rendezett felosztást.
Ha a legalsó osztóegyenesre tükrözzük a k. sorban található kis háromszögeket, akkor azt is látjuk, hogy a kisháromszögek száma a $k+1$-edik sorban 2-vel több. ÁBRA!
Ezzel megkaptuk, hogy a $k+1$. sorban valóban $2(k+1)-1 = (2k-1)+2$ kis háromszög van. De innen az is következik, hogy a kis háromszögek száma $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, hiszen feltételezáésün szerint az első k sorban k^2 kis háromszüget látunk összesen és ahhoz kellett adni az utolsó sorbeli $2k+1$-et. □

Elméleti összefoglaló. Prototípus

- Cél: igazolni, hogy egy állítás, tulajdonság minden pozitív n egész számra igaz.
- Kezdőlépés: az állítás igaz $n = 1$-re.
- Indukciós lépés: HA az állítás igaz $n = k$-ra, AKKOR igaz $n = k+1$-re is.
- Következmény: az előző kettőből minden n-re igazoljuk az állítást.

Kiegészítés: más típusok; megjegyzések

1. kezdőlépés módosítás: kezdőlépés nem $n = 1$-ről indul, hanem $n = n_0$-ról. a tulajdonságot, állítást csak minden $n \geq n_0$-ra igazolnánk.
2. indukciós lépés módosulás, I.: HA az állítás igaz $n = k$-ra, AKKOR igaz $n = k+1$-re HELYETT: HA az állítás **igaz minden n-re, ahol** $1 \leq n \leq k$, AKKOR igaz $n = k+1$-re.
3. indukciós lépés módosulás, II.: HA az állítás igaz $n = k$-ra és $n = k+1$-re, AKKOR igaz $n = k+2$-re. Figyelem: ilyenkor a kezdőlépésnél nem elegendő $n = 1$!
4. Az állítás esetleg nem igaz minden természetes számra, ezért nem is n-ről $n+1$-re következtetünk. Például n-ről $n+2$-re lépünk; így igazoljuk az összes páros számra az állítást.
5. Néha az indukció csak rejtetten jelenik meg. Egy konkrét k számra szeretnénk az állítást igazolni, de a leginkább kézenfekvő út az, ha *minden* k-nál kisebb számra is belátjuk közben az állítást.

Példa 4. Egy konvex n-szöget, ahol $n \geq 3$, néhány átlója behúzásával háromszögekre bontottunk úgy, hogy az átlók belső pontban nem metszik egymást. Mennyi lehet a háromszögek száma?

1. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy nem magától értetődő, hogy bármelyik említett felbontás ugyanahhoz a háromszögszámhoz vezet! Erre később visszatérünk, a síkgráfok tárgyalásánál, a fák megismerését követően.*

2. Megjegyzés. *Geometriai következmény: Ha megvan a válasz a feladatra, azzal az n-szög belső szögeinek összegét is meghatároztuk.*

1. bizonyítás. $n = 3$-ra nyilván igaz az állítás: nincs átlóval felbontás. Ha $f(n)$-nel jelöljük a háromszögek számát az n-szög felbontásában, akkor eszerint $f(3) = 1$. Ezzel a kezdőlépés megvan.
Indukciós lépés: feltesszük hogy $n = k$-ra tudjuk, hogy a válasz $k-2$. (Ez a kezdőlépésre teljesült!) $n = k+1$-re szeretnénk tehát igazolni, hogy $(k + 1) - 2 = k - 1$ háromszögre bontható. Feltételezhetjük, hogy van olyan átló, ami pontosan egy csúcsot választ el a többitől. (Ez nem triviális, hanem meggondolandó hogy minden felbontásban találunk ilyet! Lásd: gyakorlat - a fákkal és a síkgráfokkal való megismerkedés után.) Ha ezt tudjuk, akkor vágjunk először e mentén az átló mentén. Ekkor kapunk egy k-szöget meg egy háromszöget. Ezek tovább bontásával indukció szerint $(k - 2) + 1 = k - 1$ rész keletkezik, amit igazolni akartunk.

□

2. bizonyítás. $n = 3$-ra nyilván igaz az állítás: nincs átlóval felbontás. Ha $f(n)$-nel jelöljük a háromszögek számát az n-szög felbontásában, akkor eszerint $f(3) = 1$. Technikai okból most célszerű azt is megjegyezni, hogy az állítás $n = 2$-re is igaz: ekkor egy elfajuló sokszöggel állunk szemben, amit 0 háromszögre bonthatunk. Ezzel a kezdőlépés megvan.
Indukciós lépés: feltesszük hogy MINDEN $2 \leq k \leq n$-ra tudjuk, hogy a válasz $k-2$. (Ez a kezdőlépésre teljesült). $n = k + 1$-re szeretnénk tehát igazolni, hogy $k + 1 - 2 = k - 1$ háromszögre bontható. Sorban számozzuk meg a csúcsokat 1-től $n = k + 1$-ig a kerület mentén, és tekintsük az 1 és $k + 1$ csúcsok által meghatározott oldalt. A feltétel szerint ez az oldal a felbontásban egy háromszöghöz tartozik: legyen a harmadik csúcs sorszáma q, amelyre $2 \leq q \leq k$ teljesül. ÁBRA! Ekkor látunk egy háromszögekre bontott q-szöget, egy háromszöget (melynek csúcsai $1, q, k+1$), és egy $[k+1-(q-1)]$-szöget. Ezek olyan háromszögekre bontott sokszögek, amelyek oldalszáma legfeljebb k, vagyis alkalmazhatjuk mindháromra az indukciós feltevést. Eszerint a háromszögek számának összege pontosan $(q-2)+1+(k-q) = k-1$ lesz, annyit amennyit igazolni akartunk. (Vegyük észre, hogy adott esetben arra az elfajuló esetre is hivatkoztunk, amikor $q = 2$ vagy $q = k$ előfordulásakor kétcsúcsú sokszög került elő.) □

3. Megjegyzés. *Valójában ez az általános, minden felbontást kezelő bizonyítás megkerülhető egy* **lényeglátó gondolat***tal. Ha tekintünk az n-szöghöz egyetlen háromszögekre felbontást, például egy rögzített csúcsból induló $n-3$ átlókat használva, akkor Megj. 2 alapján kiderül, hogy a sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$. Ebből viszont azt is látjuk, hogy bármely háromszögekre bontásnál ugyanezt az összeget nyerjük, vagyis a háromszögek száma nem függhet a felbontástól.*

4. Skatulyaelv

Motivációs feladat 5. Adott 5 pont egy egységoldalú szabályos háromszögben. Igazoljuk, hogy létezik közülük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\frac{1}{2}$.

Bizonyítás. Húzzuk be a középvonalait a háromszögnek, így 4 egybevágó, $\frac{1}{2}$ oldalhosszú szabályos háromszöget kapunk. ÁBRA!
Mivel a pontok száma nagyobb a kisháromszögek számánál, **lesz olyan kis háromszög, amibe több pont is esik**. (Ha egy pont a határra esik, azt is úgy tekintjük hogy beleesik a háromszögbe.) Vegyük ezt a háromszöget és a beleeső pontpárt. A pontpár által meghatározott szakasz hossza nem nagyobb, mint a szakasz által meghatározott egyenes által háromszögből kimetszett szakasz hossza. Ez utóbbiról nem nehéz látni, hogy a háromszög oldalhosszát nem haladhatja meg. (Vegyük figyelembe hogy a legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemköztes!) □

Elméleti összefoglaló: a skatulyaelv különféle változatai

- Ha $n \in \mathbb{Z}^+$ darab skatulyában n-nél több tárgyat akarunk elhelyezni, akkor lesz **legalább egy olyan skatulya**, amelybe **legalább két** tárgy kerül.
- Ha van $n \in \mathbb{Z}^+$ darab skatulyánk és **több mint** $k \cdot n$ darab tárgyat helyezünk el a skatulyákban, akkor lesz **legalább egy** olyan skatulya, amelybe **legalább** $k+1$ tárgy kerül. ($k \geq 1$ egész)
- Ha $n \in \mathbb{Z}^+$ darab skatulyában végtelen sok tárgyat helyezünk el, akkor lesz **legalább egy** olyan skatulya, amelyben **végtelen sok** tárgy van. (Azaz nem lehet mindegyik skatulyában véges sok tárgy.)
- *A skatulyaelv igazolása.* Indirekt bizonyítás, egyszerre mind a 3 verzióra: feltesszük, hogy nincsen ilyen "sok" tárgyat tartalmazó doboz. Ha a fenti állítások nem lennének igazak, akkor rendre minden dobozban legfeljebb 1, ill. k, ill. véges sok tárgy lehetne csupán. Mindhárom esetben azt látjuk, hogy a tárgyak összes számossága kisebb, mint ami előzetesen jelezve van. Ez ellentmondás. $\square$

Kiegészítés

1. Az ismertetett kimondásnál a "legalább" szavaknak nagy jelentősége van: nem lehetünk biztosak benne, hogy pontosan 2 vagy $k+1$ tárgyat tartalmazó dobozunk is lesz, vagy hogy pontosan 1 darab "sok" tárgyat tartalmazó doboz lesz.
2. A skatulyaelvre gondolhatunk úgy is, hogy két halmazunk van, A és B. A felel meg a tárgyak halmazának, B a skatulyák halmazának. Azt vizsgáljuk, hogy az olyan $f : A \to B$ hozzárendelések (függvények) esetén, amiknek értelmezési tartománya A, hányszor fordulnak elő a függvény képeiként a B-beli elemek. Azt látjuk, hogy lehetetlen, hogy minden B-beli elem kevesebbszer forduljon elő, mint $|B|/|A|$. ÁBRA!
3. Bár a módszer egyszerűnek tűnik, igen változatos helyzetekben használatos. (Valószínűségszámításból még visszatérünk erre). Komplexebb alkalmazásainál rendszerint a skatulyák ravasz meghatározása adja a kulcsot.