Leszámolási alapfeladatok

2. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.09.23.

1. Hányféleképpen?

1.1. Alapok

Leszámolási problémákkal általános iskola alsó tagozatától találkoznak a ránk bízott gyerekek.

Motivációs feladat 1. Hányféleképpen színezhetünk ki egy három csíkos zászlót piros, fehér, zöld színekkel, ha minden csík egyszínű, és minden színt egyszer használhatunk?

Alapszinten a megoldás az *esetek összeszámolásá*ból áll. Amire figyelni kell a jó eredményhez - általában is! - : hogy

- olyasmit ne számoljunk meg, ami a feltételnek nem felel meg;
- egyetlen jó esetet se hagyjunk ki a felsorolásból, és
- egyiket se számoljuk meg többször.

A számolást segítheti, ha **szisztematikusan**, valamilyen jól áttekinthető módszer szerint számolunk - erre visszatérünk még.

Egy általánosabb helyzetben már a feladat n paramétere lehet az adott elemeink (például színeink) száma. (Esetünkben $n = 3$.) Ezekből lehet, hogy adott, k hosszúságú sorozatokat készítenénk, netán a cél kiválasztani belőlük k darabot. Mindkét esetben *megengedhetjük vagy megtilthatjuk* az egyes elemek *ismétlődését.* A sorozatban számít a sorrend, tehát van első elem, második elem stb. A kiválasztásnál nincs sorrend, mintha egy zsákba dobálnánk bele a kiválasztott elemeket – csak a zsák tartalma számít, az elemek nincsenek sorbarendezve.

Az ismétlődések megengedése esetén *nem követeljük meg*, hogy valamelyik elem ténylegesen többször is előforduljon, csak *megengedjük.*

Az elemek egy csoportját, ahol az elemek sorrendje nem számít, **halmaz**nak nevezzük. Fontos tudatosítani, hogy egy halmazban az elemeknek *nincs* sorrendje. Ha az elemek felsorolásával adunk meg egy halmazt kapcsos zárójelek között, akkor sem számít a felsorolt elemek sorrendje, csak azok összessége. Például $\{2, 5, \circ, u\}$ és $\{\circ, u, 5, 2\}$ ugyanazt a négyelemű halmazt jelentik. Ezzel szemben ha **sorozat**ról, vagy **listá**ról beszélünk, akkor az elemek sorrendje a felsorolásnál már számít. A $2, 5, \circ, u$ és a $\circ, u, 5, 2$ *sorozatok* már különbözőek.

1.2. Összeadás, kivonás

Motivációs feladat 2. Hány olyan n-jegyű pozitív egész számunk van, amelyben
(a) a 9-es jegyek száma legfeljebb 1?
(b) a 9-es jegyek száma több, mint 1?

Leszámlálási feladatok megoldásaiban az **összegzés** mit jelent, mikor használjuk?
Akkor, ha az összes esetet, amit meg akarunk számolni, **néhány kategóriába rendezzük, és kategóriánként külön-külön számolunk**. Ez történt például az n elemű halmaz részhalmazainak megszámolásakor, amikor aszerint csoportosítjuk a részhalmazokat, hogy hány elemük van.
Vagy ez történhet, ha a legfeljebb 1 darab 9-es számjegyet tartalmazó n-jegyű számok számát számoljuk meg:

Az (a) rész megoldása. Könnyebb számolni külön-külön a 0 darab, illetve az 1 darab 9-est tartalmazó n-jegyű számokat.
• $8 \cdot 9^{n-1}$ darab n-jegyű szám van 9-es jegy nélkül, figyelembe véve, hogy 0-val nem kezdődhet a szám.
Ha egyetlen 9-es van, akkor annak pozíciója szerint megint esetekre bontunk.
• Ha az egyetlen 9-es jegy az első helyen áll, akkor az ilyen számok száma 9^{n-1}.
• Ha a 9-es jegy a maradék $n-1$ hely valamelyikén áll, akkor $n-1$-féleképpen kiválaszthatjuk a helyét, és minden ilyen esetben az első számjegy 8-féle, a többi 9-féle lehet, vagyis $(n-1) \cdot 8 \cdot 9^{n-2}$-t kapunk. Az összeg tehát $8 \cdot 9^{n-1} + 9^{n-1} + (n-1) \cdot 8 \cdot 9^{n-2}$. □

Összegzésre láttunk példát az előző előadáson is: amikor $(k+1)^2$ kisháromszöget akartunk megszámolni a 3. motivációs feladatban, akkor megszámoltuk azokat, amiket az első k sorban látunk (összesen k^2) – ez az indukciós lépésből következett. Ehhez hozzáadtuk az utolsó sorban kapott kisháromszög-számot.

Dobjuk ki a rosszat!
Időnként az általunk megszámolni kívánt jó esetek összeszámolása nehézkes, ezzel szemben közvetlenül könnyebben számolható az összes szóba jövő esetek száma is, valamint az olyan esetek száma is, amik nem jók. Formálisan és vizuálisan ezt a következőképp írhatjuk le: egy A halmaz $|A|$ elemszámát keressük. Egyszerűen számolhatónak tűnik ugyanakkor egy H halmaz $|H|$ elemszáma, amelynek az A halmaz az egyik részhalmaza ($A \subset H$); ráadásul a különbséghalmaz, $R := H \setminus A$ elemszáma is. Ilyenkor nyilván $|A| + |R| = |H|$, vagyis $|A| = |H| - |R|$, lásd ÁBRA. (R-et az A halmaz H-ra vonatkozó *komplementer*ének mondjuk.)

A (b) rész megoldása. Motivációs feladatunkban a (b) részfeladat éppen az olyan n-jegyű számok számára kérdez rá, amikben NEM igaz, hogy a 9-es jegyek száma legfeljebb 1.
• A halmazunk elemei lehetnek tehát azok az n-jegyű számok, amelyekben a 9-es jegyek száma több mint 1.
• H halmazunkat alkothatják az n-jegyű számok;
• $R := H \setminus A$ halmazba pedig a *rossz* n-jegyű számok kerülnek, amikben a 9-es jegyek száma legfeljebb 1.
H elemszáma világos: $|H| = 9 \cdot 10^{n-1}$. R elemszámát az előző pontban adtuk meg:
$|R| = 8 \cdot 9^{n-1} + 9^{n-1} + (n-1) \cdot 8 \cdot 9^{n-2}$. Innen $|A| = |H| - |R|$ közvetlenül adódik. □

(Vegyük észre, hogy így nem kell azzal vacakolni, hogy vajon mennyi 9-es számjegy van egy számunkra megfelelő, vagyis A halmazbeli számban, és hogy ezek a 9-esek közül van-e olyan ami az első helyen áll – ami befolyásolná a választ az (a)-ban számolt módhoz hasonlóan.)

1. Megjegyzés. *Előfordulhat, hogy a rossz esetek halmaza (amit R-rel jelöltünk), többféle alesetből adódik össze. A fenti számolásban, amikor (a)-ban meghatároztuk az R halmaz elemszámát, diszjunkt részhalmazokra tudtuk bontani a R-et, (0 darab 9-es tartalmazása ill. 1 darab 9-es tartalmazása szerint) és így külön-külön összegeztük a rossz esetek számát. Előfordulhat azonban, hogy az R rossz halmazt úgy tudjuk csak jellemezni, hogy két(vagy több) ok, tulajdonság miatt lehet NEM jó egy elem, és ezek a tulajdonságok esetleg NEM diszjunktak. Erre még visszatérünk, amikor a* **szitaformulá***val ismerkedünk meg.*

1.3. Szorzási szabály, független döntések

Motivációs feladat 3. Egy 36 fős osztályban DÖK képviselőket választanak
(a) hányféle lehetséges kimenetel van, ha három képviselőt lehet választani?
(b) hányféle kimenetel lehetséges, ha három képviselőt lehet választani, ráadásul úgy, hogy legyen kiosztva közöttük az elnöki, titkári és jegyzői pozíció?
(c) hányféle kimenetel lehetséges, ha extrém módon lehetséges a pozícióhalmozás is, vagyis a 3 pozíció kiosztása a cél úgy, akár kevesebb mint 3 diák is osztozhat rajtuk?

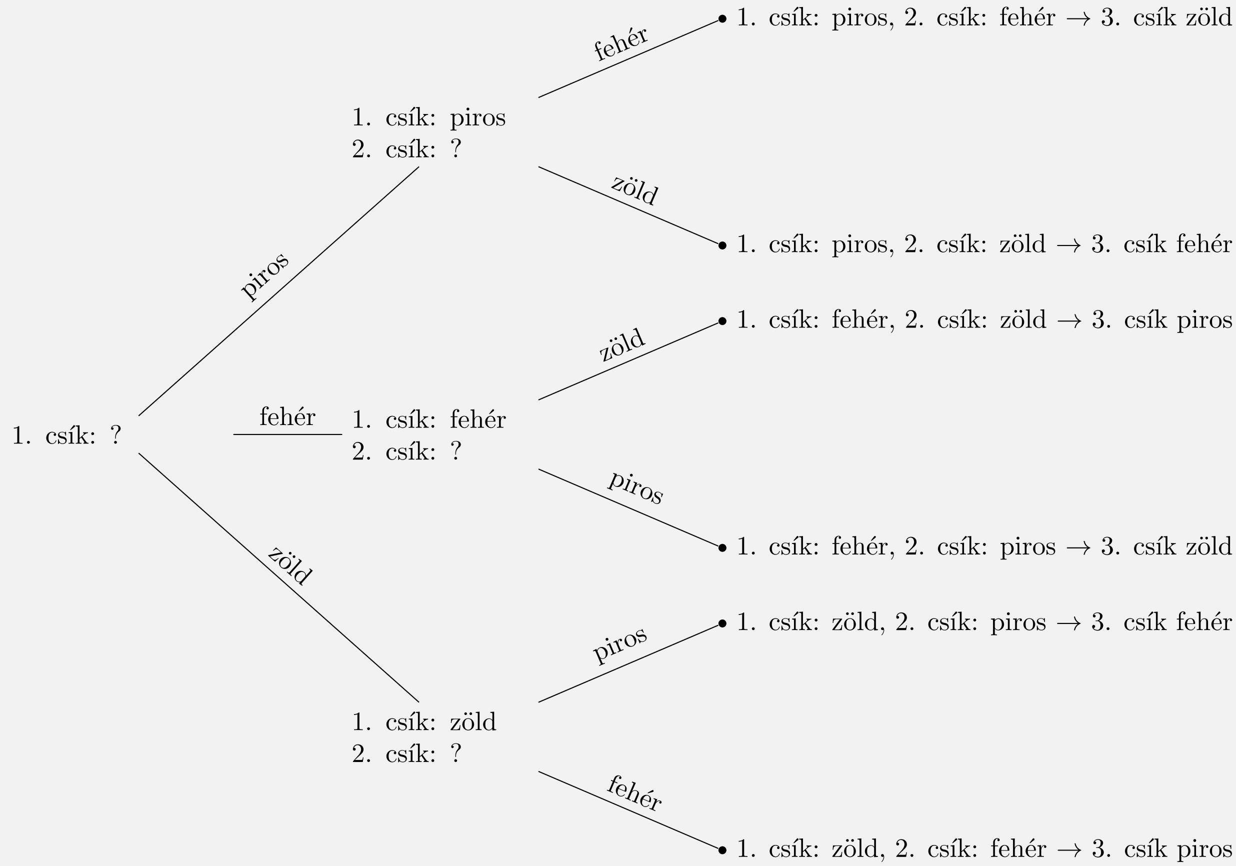
Talán első látásra meglepő, de a részfeladatok közül az (a) megoldása a legkevésbé könnyű közvetlenül; arra a következő alfejezetben térünk rá.

(b) & (c) megoldása. Válasszunk sorban, pozíciónként. Az első, elnöki pozícióba 36 döntési lehetőség adódik mindkét esetben. A második, titkári pozíció megválasztásánál akárki is az elnök, 35 különböző jelölt adódik a (b) esetben, míg újra csak 36 lehetőség van, ha ismétlődhetnek pozíciónként a diákok, a (c) szerint. Végül a harmadik döntés a jegyzőről szól, itt a (b) esetben 34 jelölt maradt, a (c) esetben ismét csak 36. Vegyük észre, hogy a (b) esetben a döntéseink a második és harmadik pozícióban függtek attól, hogy kit választottunk

korábban, de **a döntési lehetőségeink száma ettől független volt**. (c) esetben nemcsak a számuk, maguk a döntési lehetőségeink is megegyezőek voltak. Ez azt jelenti, hogy az esetszámot a fent számolt számok szorzataként kapjuk: (b)-re $36 \cdot 35 \cdot 34$, (c)-re $36 \cdot 36 \cdot 36$ lesz a válasz. Valóban, minden döntés utána végső pozíció-kiosztási lehetőségek száma annyifelé ágazik, ahányféle döntési lehetőségünk volt; vagyis a számuknak a döntési lehetőségek szorzata felel meg. □

Ezt ragadja meg a döntési fa.

Döntési fa és szorzási szabály



3 lehetőség | 2 lehetőség minden esetben | 1 lehetőség minden esetben.

Döntési fa az 1. motivációs feladathoz (zászlószínezés). A szisztematikus eset-áttekintésben is segít.

A döntési fa elágazásai a döntési lehetőségeket szemléltetik. Ha elindulunk a gyökérből, végighaladva valamerre elakadásig egy döntéssorozatot látunk; a megfelelő vonalakra írjuk fel, hogy milyen döntést takar, az elágazásokhoz pedig azt, hogy az addigi döntéseink alapján hogyan is állunk aktuálisan. Látható, hogy három döntési pontunk van: mindhárom helynél eldöntjük, hogy melyik szín kerüljön oda. Ezek a döntések **független döntések**, mert minden döntésnél **ugyanannyi választási lehetőségünk** van, függetlenül attól, hogy előtte milyen döntéseket hoztunk. Másképp: ilyenkor a döntési fában az azonos szinten levő elágazásoknál a választható útirányok száma azonos. Különböző szintenként eltérő lehet, mint jelen esetben is.
Így az összes döntéssorozatok számát az egyes szinteken levő választási lehetőségek számának szorzata adja, példában $3 \cdot 2 \cdot 1$. Általánosan

1. Állítás (Szorzási szabály)**.** *Ha n független döntést hozunk, és az i. döntésnél d_i választási lehetőségünk van, akkor összesen $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$-féle döntéssorozatunk van.*

Sorozatok készítése (variáció).
• Az n elemből alkotható k hosszúságú sorozatok száma n^k. (Az ismétlődést nem tiltottuk meg.)
• Az n elemből alkotható k hosszúságú, ismétlődésmentes sorozatok száma $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, hiszen a sorozat i. tagjának kiválasztásakor $(i-1)$ elemet használtunk már el, tehát $n-i+1$-féleképpen dönthetünk.
• Az n elemből alkotható $k=n$ hosszúságú, ismétlődésmentes sorozatok száma eszerint $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$. Ez értelemszerűen megegyezik az n elem sorbarendezéseinek számával. (permutációk száma)

1.4. Osztás

Mese. A gulyás heverészik a mezőn. Megszámolja, összesen kétszázhúsz lábat lát. Megvan-e mind az ötvennégy jószág?

A tehén-szabály. Néha, ha a keresett objektumokat akarjuk megszámolni, egyszerűbb őket első körben többszörösen megszámolni; **ha** egyértelmű, hogy **minden objektumot ugyanannyiszor: k-szor számoltuk, akkor** az objetumok számát megkapjuk k-val való osztás után. (Ha vannak zavaró tényezők, mint egy pásztorkutya a mesében, azt is vegyük figyelembe!)

(a) megoldása. A (b) részt az imént megoldottuk. Az (a) részben a kiválasztott jelöltekhez még nem rendeljük hozzá a pozíciójukat. Így a (b) számolási metódusa minden triót annyiszor számol össze, ahányféleképpen közöttük a pozíciók kioszthatók. Másképp fogalmazva: ahányféleképp ők sorba rendezhetők. Ez a szám nyilván $3\cdot 2\cdot 1=6$, így összesen $\frac{36\cdot 35\cdot 34}{3\cdot 2\cdot 1}$ lehetséges választási kimenetel adódik. □

k-elemű csoportok kiválasztásainak száma - nincsen ismétlődés az elemek között.
• Az n elemből k különböző elemű kiválasztásainak száma

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Az $\binom{n}{k}$ alakú számot binomiális együtthatónak nevezzük és "n alatt a k"-nak olvassuk ki. Az irodalom erre hivatkozik úgy mint *(ismétlés nélküli) kombináció.* Természetes módon egy n elemi halmaz k elemű részhalmazainak számát adja meg.
• Ha az n elem között van $k_1, k_2, \ldots, k_m$ egymással megegyező elem, akkor ezeknek a sorbarendezéseinek száma

$$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}.$$

(Az ilyen ismétlődő elemek egy sorba rendezését *ismétléses permutációnak* nevezzük.)

Valóban: ha az n elem összes $n!$ sorrendjét vennénk, akkor így megszámolnánk minden sorbarendezést annyiszor, ahányféleképp az egyes különféle elemfajtákat maguk között sorbarendezhetjük. Az első típusú (mondjuk sárga) elemek $k_1!$ sorrendben lehetnek, a második típus (piros) $k_2!$ sorrendben, és így tovább. Megszámolhatnánk ugyanezt így is: meghatározzuk először a első típusú (sárga) elemek helyét $\binom{n}{k_1}$-féleképpen. Ezután meghatározzuk a második típusú (piros) elemek helyét $\binom{n-k_1}{k_2}$-féleképpen a megmaradó helyek közül, és ezt folytatjuk. Így ezt kapjuk:

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\ldots\binom{n-k_1-k_2-k_3\ldots-k_{m-1}}{k_m}.$$

A feltételből adódóan persze $n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}=k_m$, vagyis az utolsó kiválasztás egyértelmű, azaz egyféle lehetőséget ad, ahogy várjuk.

2. Megjegyzés. *Az imént egy általános formulák közötti egyenlőséget, vagyis* **azonosság***ot igazoltunk kombinatorikus úton. Ugyanide algebrai úton is eljuthatunk, figyelembe véve az alábbit:*

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!},$$

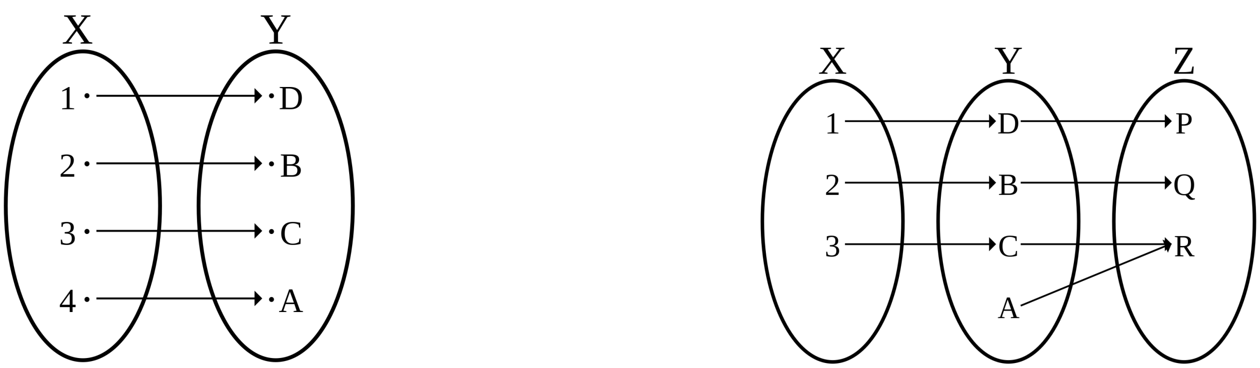
és észrevesszük, hogy az $(n-k_1)!, (n-k_1-k_2)!$ stb. tényezők számlálóban és nevezőben is szerepelnek, így egyszerűsíteni lehet velük.

1.5. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések : bijekciók

A különféle leszámolási feladatok megoldásai, amiket eddig vizsgáltunk, egy tőről fakadtak abban az értelemben, hogy egy-egy egyszerű MODELLt alkalmaztunk a megoldásukkor: például a vizsgált objektumok sorrendjeit karaktersorozatokkal jellemeztük (zászlószínezés, n-jegyű számok száma). A **közös modellnek való megfeleltetés** közös tárgyalási módra is lehetőségre ad, és a lényeget is kiemeli.

A kombinatorika egyik kiemelten fontos módszere a megfeleltetés (1. ábra). Sokszor csak feladat szövegében található objektumok és egy matematikai modell (halmaz, lista, stb.) közötti megfeleltetés az, amit létesítünk. Azonban nemcsak az értelmezés, hanem a bizonyítás része is lehet egy jól választott hozzárendelés.

• $f : X \to Y$ **injektív leképezés** (függvény); beleképezés: Y minden elemének legfeljebb 1 ősképe van. "Különböző elemekhez különbözőt rendel."
• $f : X \to Y$ **szürjektív leképezés** (függvény); ráképezés : Y minden elemének van ősképe X-ből (legalább 1).
• $f : X \to Y$ **bijektív leképezés** (függvény); kölcsönösen egyértelmű leképezés: Y minden elemének pontosan 1 ősképe van. Ilyenkor X és Y elemeit a leképezés párba állítja.



1. ábra. $X \to Y$ bijekció (kölcs. egyértelmű leképezés) balra, $X \to Y$ injekció beleképezés) majd $Y \to Z$ szürjekció (ráképezés) jobbra.

Miért hasznosak nekünk ezek a megfeleltetések?

1) **Mert sokféle egyszerű leszámolási problémát jól modelleznek.** Például:
• $X \to Y$ hozzárendelések száma: minden X-beli ponthoz $|Y|$-féle lehetőség szabadon. "Minden gyerek (X halmazban) a különböző könyvből (Y halmazban) választhat egyet" Minden könyvből van elegendő darabszám. $|X|$ darab döntés, összesen $|Y|^{|X|}$ kimenetel.
• $X \to Y$ injektív hozzárendelések száma: minden X-beli ponthoz $|Y|$-féle lehetőség, de azzal a megkötéssel hogy minden X-beli pont különbözőhöz van rendelve. "Minden gyerek (X halmazban) bármelyik könyvből (Y halmazban) választhat egyet, de olyat amit más nem." $|Y| \cdot (|Y|-1) \cdots (|Y|-|X|+1)$ kimenetel.
• $X \to Y$ szürjektív hozzárendelések száma: ezt majd a szita-formula után fogjuk jól érteni. "Minden gyerek X halmazban választ a Y halmazbeli könyvek közül egyet; ugyanazt a könyvet is lehet választani, de minden könyvből kell hogy válasszon valaki.
• "Kiosztottunk megadott mennyiségű Y könyvet a gyerekek (X halmaza) között" Ez nem lesz $X \to Y$ hozzárendelés, mivel egy gyerek több könyvet is kaphat, de $Y \to X$ hozzárendelésként már értelmezhető.

2) **Mert a halmazok számosságait össze tudjuk vetni:**
• $f : X \to Y$ injektív leképezés esetén $|X| \le |Y|$,
• $f : X \to Y$ szürjektív leképezés esetén $|X| \ge |Y|$,
• $f : X \to Y$ bijektív leképezés esetén $|X| = |Y|$.

Gyakorlaton már láttunk példát a lényeglátó módon megválasztott bijekcióra:

Feladat 4. Mennyi részhalmaza van egy n elemű A halmaznak?

Bizonyítás. 1. lépés: *bijekció.*
Jelöljük A halmaz i. elemét a_i-vel: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Jelöljük az n hosszú $0-1$ sorozatok halmazát X-szel. Ekkor minden $\mathbf{v} = (v(1), v(2), \ldots, v(n)) \in X$ sorozathoz készítsük el egy részhalmazát A-nak így: pontosan akkor vesszük be az a_i elemet a részhalmazba, ha $v(i) = 1$.
Így minden sorozathoz rendeltünk egy részhalmazt. Ráadásul minden részhalmazt megkapunk pontosan egyféleképpen. Ha a részhalmazok alkotják Y-t, akkor eszerint $X \to Y$ bijekciót adtunk meg.

2. lépés: *számossági összevetés és visszavezetés*
Az előbb látottak alapján, ha $X \to Y$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, vagyis bijekció, akkor $|X| = |Y|$. $|X|$ számossága azonban ismeretes: 2^n darab n hosszú $0-1$ sorozat képezhető a szorzási szabály szerint. Eszerint a részhalmazok száma is 2^n. □

3. Megjegyzés. *A részhalmazokhoz tartozó sorozatot (vektort)* **karakterisztikus vektor***nak is szokás hívni.*

Megnézünk most még egy jellegzetes alkalmazást a bijekciós módszerre.

Motivációs feladat 5. Karácsonykor 15 faktos diákunk között akarunk kiosztani összesen 24 (egyforma) zselés szaloncukrot. Hányféle kiosztás lehetséges?
Motivációs feladat 6. A fagyizóban $n = 12$-féle fagylaltból kérhetünk kehelybe $k = 4$ gombócot. (A sorrend nem számít, és ha akarunk, ugyanabból a fajtából több gombócot is kérhetünk.) Hányféle ilyen fagyikelyhet rendelhetünk?

Bizonyítás az 5. feladatra. Hívjuk egymás után be magunkhoz egyenként, egymás után őket osztálynévsor szerint (vagyis rögzített sorrendben!); az új tanuló akkor érkezzen, amikor az előző kilépett az ajtón. Ekkor a kiosztási eljárást a következő lépéssorozattal tudjuk leírni: minden lépésben választunk, hogy
• a bent lévő diáknak adunk egy újabb cukrot, vagy
• elbocsátjuk, hogy beküldje a következőt.
Amire figyelni kell: 24-szer kell összesen cukrot adni, és az utolsó lépés a 15. elbocsátás kell legyen, különben nem lenne kinek adni a megmaradó cukrot.

Így minden kiosztáshoz egy $24 + 15$ hosszú karaktersorozatot rendelhetünk, ahol minden karakter 1 (+1 cukor) vagy 0 (elbocsátás); továbbá pontosan 24 darab 1-es van a sorozatban és az utolsó karakter 0.
Az egyszerűség kedvéért az utolsó karaktertől, ami fix, tekintsünk is el, így olyan $(0-1)$ sorozatok lesznek az Y képhalmazban, amik hossza $24 + 14$ és az 1-esek száma 24.
Vegyük észre, hogy ez a hozzárendelés **bijekciót ad** a kiosztások X halmaza és Y sorozatai között, mert minden sorozatot megkapunk, és mindegyiket egyszer.

ÁBRA!

Hány sorozatunk van Y-ban? Ahányféleképpen $24 + 14$ hely közül 24-et kiválaszthatunk; vagyis ez egy binomiális együttható: $\binom{24+14}{24}$. Ez tehát a kiosztások száma is! □

Bizonyítás az 6. feladatra. Kódoljuk ismét el a fagyigombócok kiválasztását!
képzelhetjük úgy, hogy egymás után lerajzoljuk a az első típusú, második típusú, stb. gombócok mindegyikét sorban, amiket kértünk. De a színek a táblától messzebb nem látszanak, úgyhogy elválasztó vonalat teszünk amikor új típusú gombóc következik a sorban. Sőt: egymás mellé is kerülhet elválasztó vonal, ezzel kifejezve, hogy a soron következő fagylattípusból egyet sem kértünk. Így összesen 4 gombócot rajzolunk fel – legyen jele a 0, és 11 elválasztó vonalat – jelezzük őket 1-essel. Így bijekciót kapunk a $4 + 12 - 1 = 15$ hosszú $0-1$ sorozatok halmazával, amikben a nullák száma pontosan 4. Ebből adódóan a kiosztások számára a $\binom{15}{4}$ számot nyerjük.
ÁBRA! □

2. Állítás. (Ismétléses kombináció)
• *n különféle tárgy(típus)ból k darabot $\binom{n+k-1}{k}$-féleképpen választhatunk ismételt választás engedélyezésével, ha a sorrend nem számít.*
• *k egyforma tárgyat n különböző ember között szétosztani $\binom{n+k-1}{k}$-féleképpen lehet.*