VM fejezetek, Rekurziók, Fibonacci

5. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.10.14.

1. Rekurziók

Motivációs feladat 1. Hogyan folytatódik a sorozat?
a) 1,3,9,27,81...
b) 1,1,2,3,5,8,13,21, ...
c) 2,4,7,11,16,22,29, ...

Hasonló kérdésfelvetéssel általános iskola alsó tagozatától találkozunk, és jellemző résztvevője a "hagyományos" IQ teszteknek is. A kérdés persze nem jól definiált, hiszen egy sorozat első néhány eleme nem határozza meg egyértelműen a sorozat további elemeit. A következőkben arról esik szó, miképplehet matematikailag precízen beszélni sorozatok folytathatóságáról; és hogy miképp kapcsolódik ez a kombinatorika tárgykörébe.

Rekurzió.
Az olyan $a(1), a(2), a(3), \ldots$ sorozatokat, amelyeknek n. tagja, vagyis $a(n)$ definiálható a korábbi tagok segítségével, vagyis egy olyan függvényként, aminek bemeneti értékei $n, a(n-1), a(n-2), \ldots a(1)$, kimeneti értéke $a(n)$, rekurzív sorozatnak hívjuk.

Példák:
a) $a(n) = 3 \cdot a(n-1)$ minden $n > 1$-re, és $a(1) = 1$
b) $b(n) = b(n-1) + b(n-2)$ minden $n > 2$-re, és $b(1) = b(2) = 1$. Ezt hívják **Fibonacci sorozat**nak. Általában így jelöljük: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3 \ldots$ és általában is $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
c) $c(n) = c(n-1) + n$ minden $n > 1$-re, és és $c(1) = 2$.

1. Megjegyzés. *Gyakran a fenti helyett az a_1, a_2, a_3 satöbbi, indexelt jelölést használjuk a sorozat elemeire.*

Motivációs feladat 2. Sakk feltalálója. A klasszikus történet szerint az unalma elűzéséért hálás indiai király a sakkjáték feltalálójának felajánlotta, hogy azt kívánhat jutalmul, amit akar. A feltaláló azt kérte, hogy a sakktábla első mezejére tegyenek egy búzaszemet, a másodikra szintén, a harmadikra kettőt, így tovább, minden mezőre annyit, mint az összes megelőzőre összesen. A király felnevetett: szerény kérés! Udvari matematikusa azonban kissé elgodolkoztatta... mennyi is volna a jutalom?

Bizonyítás. Könnyű felírni esetünkben rekurzív képlettel, hogy mennyi búzaszem áll az n. mezőn, hiszen adódik a feltétel alapján:

$$a(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \ldots + a(n-1),$$

ahol $a(1) = 1$.
Le tudjuk olvasni ebből $a(n)$, vagy a konkrét esetben $a(64)$ értékét? Közvetlenül talán nem, de ha kiszámoljuk az első néhány értéket, megsejthetjük a választ. Ha van egy jó sejtésünk, akkor pedig a bizonyítás is egyszerű: teljes indukcióval. $a(1) = 1, a(2) = 1, a(3) = 2, a(4) = 4, a(5) = 8, a(6) = 16 \ldots a(n) = 2^{n-2}$ ha $n > 1$?
Igen, bizonyítás teljes indukcióval. Kis n-re láttuk hogy jó. Ha n-re igaz hogy $a(n) = 2^n$, akkor $n+1$-re is igaz az $a(n+1) = 2^{n+1}$ képlet, hiszen

$$a(n+1) = a(1) + a(2) + a(3) + \ldots + a(n-1) + a(n) = a(n) + a(n) = 2 \cdot a(n) = 2^{n+1}.$$

A piros összegzés a rekurzív képletből adódott, az $a(n) = 2^n$ felhasználása volt az indukciós hipotézis alkalmazása az utolsó lépésben.
Eszerint $a(64) = 2^{62}$, a táblán pedig összesen annyi búzaszem lesz, mint amennyi $a(65)$ lenne, vagyis 2^{63}. □

2. Megjegyzés. *A matematikai számeredmény után tegyük ezt kontextusba. Konkrét mérés alapján 300 szem búza tömege 11,4 gramm, ezért egy búzaszem átlagos tömege 0,038 gramm. Ezt felhasználva a 9223372036854775808 búzaszem tömege 35048812350 tonna. Másképp: mekkora területet lehetne a Földbolyón fél centi vastagon beborítani vele? Körülbelül az egészet!*
Ezt a jelenséget, hogy egy mennyiség az ismételt duplázással igen gyorsan növekszik, exponenciális robbanásnak hívjuk.

3. Megjegyzés. *Rekurziós feladatnál nagyon hatékony megoldási módszer lehet, hogy* **megsejtjük** *az eredményt, majd* **rábizonyítjuk** *a rekurzív képlet alkalmazásával.*

Rekurziók egyes családjainál ennél direktebb eszlözeink is lesznek, amint azt alább látjuk.

1.1. Kombinatorikus alkalmazások: rekurzió felismerése és felírása

4. Megjegyzés. *További észrevétel, hogy a megtalált rekurziós formula kielégítette az $a(n) = 2^{n-2}$ explicit képletet; amit persze egy egyszerűbb rekurzióval is felírhattunk volna: $a(n+1) = 2 \cdot a(n)$, ha $n > 2$. Fontos tanulság, hogy egyazon rekurzió többféle, lényegesen eltérő rekurziós képletből is származtatható.*
Másrészt az is igaz, hogyha a kezdeti feltételt ($a(1)$ értékére) nem rögzítjük, akkor persze a képzési szabály még nem definiálja egyértelműen a sorozat elemeit: tehát egy rekurziós összefüggés is több sorozatot jellemezhet!

Motivációs feladat 3. Ki nevet a végén. Ovis ”Ki nevet a végén” játékot játszunk. Szabályos dobokockával dobunk és lelépjük. Ha az 0-s startról indulunk, akkor hányféle dobássorozat után léphetünk rá pont a 100-ra? ÁBRA!!

Bizonyítás. 100-ig elég reménytelen volna számbavenni az összes esetet. Ami segíthet: ha megpróbáljuk általánosan megközelíteni a kérdést. Jelölje $A(n)$ az n-es mezőre eljutások számát. Kis n értékeket még az ujjainkon ki tudjuk számolni. Általában pedig azt vehetjük észre, hogy aszerint hogy mi az első (vagy a tetszik, az utolsó) dobásunk, esetekre bonthatunk. Ha k-ast dobunk, akkor annyiféleképp fejezhetjük be, amennyi $A(n-k)$. Eszerint:

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2) + A(n-3) + A(n-4) + A(n-5) + A(n-6).$$

$A(0) = 1$, ill negatív n-ekre 0 az eredmény, ezek segítségével minden pozitív egész n-re sorban legyárthatjuk az eredményt. ☐

Motivációs feladat 4. Lépcsőmászás. Kunigunda fel akar mászni a kis-hárshegyi Makovecz-kilátóba. A kanyargós lépcső 30 lépcsőfokból áll. Hányféleképp érhet fel, ha minden lépésben egy vagy két lépcsőnyit lép, mindig felfelé?

Makovecz kilátó (forrás: parkerdo.hu)

Bizonyítás. **Általános ötlet**: 30-as lépcsőfokszámra nehéznek tűnik az összes eset felsorolása. **Oldjuk meg általánosan n lépcsőfokra, és ebből behelyettesítéssel nyerjük vissza a speciális esetet**, $n = 30$-at!
Jelölje a_n a választ n lépcsőfok esetén. Ha az első lépésnél k fokot lépünk, a maradék $n-k$ lépcsőfokon éppen a_{n-k}-féleképpen mehetünk fel, hiszen látjuk, hogy az első lépés után egy ugyanolyan jellegű feladatot kapunk, csak **kisebb lépcsőfokszámra**. A k lehetséges értékeit megnézve az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ rekurziós képletet kapjuk. Kell még a rekurzió teljes megadásához a kezdeti értékek közül 2, hogy értelmesen elinduljon a képzési szabály. Ezt egyszerűen meg tudjuk határozni esetvizsgálattal: $a_1 = 1, a_2 = 2$. Így kaptunk egy lineáris rekurziót kezdeti feltételekkel. Ismerős ez a sorozat: a Fibonacci sorozatot nyerjük, csak átindexelve, ”eggyel eltolva”. Innen adódik, hogy $a_n = F_{n+1}$, hiszen a képzési szabályuk megegyezik, és $a_n = F_{n+1}$ teljesült $n = 1$, $n = 2$-re. Konkrét számeredményként egyszerű összeadással a 1346269 adódik, a rekurzív képletben látott összeadás ismételt alkalmazásával. ☐

5. Megjegyzés. *A fenti két esetben a sorozat n. tagjának értékét úgy kaptuk meg, hogy visszavezettük kisebb indexű sorozatelemeknek megfelelő esetek összegére. Ez azt súgná, hogy tipikus alkalmazásban az együtthatók pozitívak lesznek. Ám a gyakorlatban könnyen kaphaunk negatív együtthatót is; ez kombinatorikusan annak fele meg, hogy a "dobjuk ki a rosszat" elvet alkalmazzuk. Ilyenre majd gyakorlaton látunk példát.*

A rekurzió alkalmazási receptje

- **1. lépés:** *A leszámolási feladatban fogalmazzuk meg a kérdésfelvetést általánosan, n paraméterrel (ha nem így lenne). Próbáljuk a speciális helyett az általános feladatot megoldani!*

  Ez általános matematikai trükk: időnként a speciális eset igazolása jóval nehezebb, mintha az általánosabb összefüggést szeretnénk igazolni, ami a mögöttes matematikai tartalmat jobban feltárja.

- **2. lépés:** *Vezessünk be jelölést: $a(n)$ jelölje az általános kérdés esetén n értékre adott választ. Írjuk fel, hogy kis n értékek esetén mit kapunk!*

  Kis n értékekre kapott eredmény hasznos lehet a konkrét rekurzió definiálásában is, mint az előző feladatban. De hasznos lehet abban is, hogy megsejtsük, miként adható zárt formula $a(n)$ értékére.

- **3. lépés:** *Próbáljuk visszavezetni $a(n)$ kiszámolási módját arra, ha már ismerjük $a(n-1), a(n-2), \ldots, a(1)$ értékét!*

  Ha a kiszámítási mód különféle esetek összegzéséből adódik, akkor egy összegképletet nyerünk. Ha minden $a(n-1)$-ben számolt esetet ugyanannyiféleképpen "folytathatunk", hogy $a(n)$-et megkapjuk, akkor a szorzási szabály segít majd.

Van-e hatékonyabb eljárás arra, hogy konkrét számeredményt is kinyerjünk hasonló rekurziókból? Erről szól a következő alfejezet.

1.2. Első és másodrendű homogén lineáris rekurziók általános megoldása.

1. Definíció. *Egy a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozatra vonatkozó,*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n$$

alakú képletet ***(homogén, k-adfokú) állandó együtthatós lineáris rekurzió****nak nevezünk, ahol k rögzített pozitív egész, a $c_1, \ldots, c_k$, $c_k \neq 0$ együtthatók pedig rögzített valós számok.*

6. Megjegyzés. *A fenti módon megadott sorozatban tehát minden tag megkapható az őt* **közvetlenül megelőző** *k tagból. Természetesen egy ilyen rekurzió csak akkor határozza meg a sorozat tagjait, ha az első k tagot is megadjuk. Pontosabban bármely k szomszédos tag ismerete elegendő, hiszen a rekurzió segítségével visszafelé is számolhatunk. Megjegyezzük, hogy ezen a módon a sorozat nempozitív indexű tagjai is értelmezhetők; ez néha kényelmes.*

7. Megjegyzés. *Az elnevezésben az állandó együtthatós jelző arra utal, hogy a $c_1, \ldots, c_k$ együtthatók rögzítettek (azaz nem függnek n-től), míg a lineáris jelző arra, hogy az a_{n+k}-t megadó jobboldali kifejezés az $a_{n+k-1}, \ldots, a_n$ lineáris kombinációja. Hogy valóban k-adfokú rekurzióról beszéljünk, feltesszük, hogy $c_k \neq 0$. A homogenitás azt jelenti, hogy átrendezve az egyenletet $(-1)a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n = 0$-t kapunk. Ha a jobb oldalon nem nulla állna (hanem egy szám vagy n-nek függvénye),* inhomogén *rekurziónak neveznénk.*

A továbbiakban a $k = 1$ és $k = 2$ esetet vizsgáljuk részletesebben, azaz az

$$a_1 = \alpha,, \tag{1}$$
$$a_{n+1} = c \cdot a_n \tag{2}$$

és az

$$a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta, \tag{3}$$
$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n \tag{4}$$

alakban megadott sorozatokra keresünk explicit képletet (itt $\alpha, \beta, c, c_1, c_2$ **rögzített valós számok**). (1)-et és (3)-et *kezdeti feltételek*nek nevezzük, (2)-t és (4)-t pedig *rekurzió*nak, vagy rekurziós képletnek. A két feltétel együtt (tehát (1) és (2) ill. (3) és (4)) egyértelműen meghatározza az a_n sorozatot ($n \geq 1$).

A $k = 1$ esetet szerencsére nagyon jól ismerjük: ezek a c kvóciensű mértani sorozatok. Általános képletükre felírhatjuk, hogy $a_{n+1} = c^n \cdot \alpha$.

A $k = 2$ esetben az előző esetre szeretnénk a megoldást visszavezetni.

Miért természetes, hogy a mértani sorozatok valamiféle általánosítására számítunk?

- mert ha véletlenül egy q^n mértani sor első három eleme teljesíti a rekurziót, vagyis $q^3 = c_1 q^2 + c_2 q$, akkor az összes teljesíteni fogja: ez kiadódik a rekurziós egyenlet q-val való ismételt szorzásából.
- mert tapasztalataink is arra mutatnak, hogy a megoldás *sokszor* hasonlít mértani sorra: például a Fibonacci sorozat egymást követő tagjainak F_{n+1}/F_n hányadosa valami rejtélyes számot, az aranymetszési számot (közelíti meg egyre jobban ahogy n tart a végtelenbe.

A módszerünk a következő lesz: előállítunk két (valamilyen értelemben független) sorozatot, amelyek kielégítik (4)-et. Ezek várhatóan nem teljesítik a kezdeti feltételeket, viszont a segítségükkel előállítunk olyan sorozatot, ami (4) mellett (3)-et is teljesíti.

Keressünk olyan $a_n = x^{n-1}$, $x \neq 0$ mértani sorozatot, ami kielégíti (4)-t, azaz amire teljesül, hogy

$$x^{n+1} = c_1 x^n + c_2 x^{n-1}.$$

Leosztva x^{n-1}-nel (mivel $x \neq 0$, ezt minden további nélkül megtehetjük), átrendezés után egy másodfokú egyenletet nyerünk x-re, ami ekvivalens a fentivel:

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0.$$

Ennek a gyökeit (amit a megoldóképlettel könnyen kiszámíthatunk) jelölje x_1 és x_2. Persze a gyökök egyike sem nulla, hiszen feltettük, hogy $c_2 \neq 0$. Levezetésünk éppen azt mutatja, hogy $a_n = x_1^{n-1}$ és $a_n = x_2^{n-1}$ eleget tesznek az (4) rekurziónak.

Ha $x_1 = x_2$, akkor a talált sorozatok egybeesnek. Szerencsére ekkor találunk más jó sorozatot: legyen $a_n = (n-1)x_1^{n-1}$. Azt állítjuk, hogy ebben az esetben a_n is teljesíti (4)-t; ehhez a_n-et (4)-be helyettesítve az alábbit kell igazolnunk:

$$(n+1)x_1^{n+1} - c_1 n x_1^n - c_2(n-1)x_1^{n-1} = 0.$$

Leosztva x_1^{n-1}-nel és átrendezve ez azzal ekvivalens, hogy

$$(n-1)(x_1^2 - c_1 x_1 - c_2) + 2x_1^2 - c_1 x_1 = 0.$$

Ebben $x_1^2 - c_1 x_1 - c_2 = 0$, hiszen x_1 éppen az $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ egyenlet megoldása; ráadásul $x_1 = x_2$, így a megoldóképletben a diszkrimináns nulla, azaz a megoldás $x_1 = c_1/2$, amiből $2x_1 - c_1 = 0$ adódik[1]. Ezt x_1-gyel felszorozva látjuk, hogy $2x_1^2 - c_1 x_1$ is egyenlő nullával, és ezzel az alábbi tétel bizonyítását befejeztük.

1. Tétel (A lineáris rekurzió karakterisztikus egyenlete alapmegoldásokat ad gyökeinek segítségével)**.** *Legyen x_1 és x_2 az*

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0 \tag{5}$$

egyenlet két gyöke, vagyis $x^2 - c_1 x - c_2 = (x - x_1)(x - x_2)$. Ekkor $a_n = x_1^{n-1}$ és $a_n = x_2^{n-1}$ **mértani sorozatok kielégítik (4)-es rekurziót**.
Ha $x_1 = x_2$, akkor a fenti két sorozat egybeesik. Ekkor azonban találhatunk még egy megoldást: $a_n = (n-1)x_1^{n-1}$ is kielégíti (4)-et.
Így mindkét esetben, $x_1 = x_2$ és $x_1 \neq x_2$ esetben is kapunk két **alapmegoldás***t: olyan sorozatot, ami a rekurziót kielégíti, és nem kapható meg egyik a másikból konstanssal való szorzás segítségével.*

Az (5) egyenletet az (4) lineáris rekurzió *karakterisztikus egyenletének* nevezzük.

8. Megjegyzés. *Előfordulhat, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökei nem valósak, hanem komplex számok. Ez csak annyiban zavarja a megoldás menetét, amennyiben nem szeretünk komplex számokkal számolni; elvi különbséget nem okoz.*

Most megnézzük, hogyan lehet két, az (4) rekurziót kielégítő sorozatból további, hasonló tulajdonságú sorozatot készíteni.

[1] Ez onnan is látható, hogy x_1 kétszeres gyöke a $p(x) = x^2 - c_1 x - c_2$ polinomnak, így a deriváltjának is gyöke, azaz $p'(x_1) = 2x_1 - c_1 = 0$.

1. Állítás (Alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldás).
Legyen a_n és a_n^* két sorozat, melyek kielégítik az (4) rekurziót. Ekkor tetszőleges λ_1 és λ_2 rögzített (valós vagy komplex) számokra a $b_n = \lambda_1 a_n + \lambda_2 a_n^*$ sorozat is kielégíti az (4) rekurziót.

Bizonyítás. A feltételünk alapján $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ és $a_{n+2}^* = c_1 a_{n+1}^* + c_2 a_n^*$ egyaránt teljesül. Emiatt

$$b_{n+2} = \lambda_1 a_{n+2} + \lambda_2 a_{n+2}^* = \lambda_1(c_1 a_{n+1} + c_2 a_n) + \lambda_2(c_1 a_{n+1}^* + c_2 a_n^*) =$$

$$= c_1(\lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+1}^*) + c_2(\lambda_1 a_n + \lambda_2 a_n^*) = c_1 b_{n+1} + c_2 b_n$$

is fennáll. □

9. Megjegyzés. *Akik már tanultak lineáris algebrát, azok felismerhetik, hogy az előző 1 állítás azt mondja, hogy az (4) rekurziót kielégítő számsorozatok zártak a lineáris kombinációkra, azaz egy ($\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti) vektorteret alkotnak. Mivel az első két tag szabadon választható, és a sorozat további tagjait ez egyértelműen meghatározza, eme vektortér dimenziója kettő. Tehát ha találunk valahogyan két, lineárisan független megoldását (4)-nek, az egy bázisa lesz ennek a térnek. Azok lineáris kombinációjaként minden olyan sorozat előáll, ami kielégíti (4)-t, speciálisan az (3) kezdeti feltételeknek eleget tevő sorozat is.*

10. Megjegyzés. *Az $a_n = x_1^{n-1}$ helyett nyugodtan vehetnénk az $a_n = x_1^n$, illetve egybeeső gyökök esetén az $a_n = (n-1)x_1^{n-1}$ helyett az $a_n = nx_1^{n-1}$ sorozatokat is. Ezek ugyanúgy megoldásai (4)-nek, ami azonnal látszik az 1 állításunkból: pl. $x_1^n = x_1 \cdot x_1^{n-1} + 0 \cdot x_2^{n-1}$ előáll x_1^{n-1} és x_2^{n-1}-ből $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = 0$ választással.*

Munkánk gyümölcsét learatandó nézzük meg, hogyan kapjuk meg az a_n sorozat explicit képletét az eddigiek felhasználásával.

2. Állítás (A kezdeti értékes rekurzió megoldása az alapmegoldások segítségével).
A keresett, (3)-nek és (4)-nek eleget tevő a_n sorozat egyértelműen előállítható az imént definiált alapmegoldások lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. Az 1. állítás szerint a $\lambda_1 a_n + \lambda_2 a_n^*$ alakú sorozatok teljesítik az (4) rekurziót, tehát csak a kezdeti értékekkel kell foglalkoznunk. Ehhez úgy kell megválasztanunk λ_1-et és λ_2-t (a többi paraméter ismert), hogy

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1^*, \text{ és} \\ a_2 &= \beta = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2^* \end{aligned}$$

egyaránt teljesüljenek. Ha $x_1 \neq x_2$, azaz $a_n = x_1^{n-1}$ és $a_n^* = x_2^{n-1}$, ez a

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \beta &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert adja, amit a középiskolából ismert módszerekkel megoldva a $\lambda_1 = (\beta - \alpha x_2)/(x_1 - x_2)$, $\lambda_2 = (\alpha x_1 - \beta)/(x_1 - x_2)$ megoldást kapjuk.

Ha $x_1 = x_2$, azaz $a_n = x_1^{n-1}$ és $a_n^* = (n-1)x_1^{n-1}$, a

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_1 \\ \beta &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \cdot x_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk, amiből $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = (\beta - \alpha x_1)/x_1$ adódik. □

Ennek következményeként most alkalmazzuk a tanultakat a Fibonacci sorozatra!

2. Tétel. *Minden $n \geq 0$-ra a Fibonacci sorozat n tagját megadja az*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Bizonyítás. A Fibonacci sorozat esetén a karakterisztikus egyenlet $x^2 - x - 1 = 0$ lesz a rekurzió szerint. Innen adódik, hogy két különböző gyököt kapunk, ezek $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ és $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Már csak azt kell kiszámolni, hogy az ezekből képzett mértani sorozatoknak, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$-nak és $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$-nak mi lesz az együtthatója. Figyelembe véve F_1 és F_2 értékeket, a képlet szerinti eredemény adódik. □

Következményként kapjuk az alábbi állítást, ami visszaadja, miért viselkedik a Fibonacci sorozat hasonlóan egy mértani sorozathoz.

Jelölje $\lfloor r \rceil$ az r valós számhoz legközelebbi egész számot. Ha kettő ilyen is van ($r = z + \frac{1}{2}$ egy z egészre), akkor $\lfloor r \rceil$ legyen a kisebbik.

1. Következmény. *Minden $n \geq 0$ egészre*

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rceil.$$

Összefoglalva a fejezet tanulságait:
Egy $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ egyenlettel és az a_1, a_2 tagokkal megadott sorozat explicit képletét megkaphatjuk az alábbi lépésekkel.

1. Keresünk megoldást csak a rekurzióra mértani sorozatként: $x^{n+1} = c_1 x^n + c_2 x^{n-1}$. Átrendezve elég az $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeit meghatároznunk.
2. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1}$ alakban keressük.
3. Ha $x_1 = x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 (n-1) x_1^{n-1}$ alakban keressük.
4. A λ_1 és λ_2 értékeket az a_1 és a_2 kezdeti értékekhez igazítjuk (kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer).

1.3. Fibonacci

A Fibonacci sorozathoz még visszatérünk, mert a leggyakrabban előkerülő rekurzió. Néhány kapcsolódó feladatot és állítást tárgyalunk alább.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

Feladat **5.** Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, ami nem tartalmaz szomszédos számokat?

Bizonyítás. Jelölje a választ a_n. Könnyen látható, hogy $a_1 = 2$ (gondoljunk az üres halmazra is!) és $a_2 = 3$. Bontsuk két csoportra a feltételnek megfelelő H részhalmazokat aszerint, hogy az utolsó elem, n benne van-e. Ha $n \in H$, akkor a feltétel miatt $n-1 \notin H$, és H-nak az $\{1, 2, \ldots, n-2\}$-be eső része bármi lehet, ami nem tartalmaz szomszédos elemeket; ilyen H részhalmazból tehát a_{n-2} darab van. Ha $n \notin H$, akkor H az $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ bármelyik szomszédmentes részhalmaza lehet, amiből a_{n-1} darab van. Így tehát $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, tehát az a_n sorozatra ugyanaz a rekurzió teljesül, mint az F_n Fibonacci-számokra. Összevetve a kezdőértékeket $a_n = F_{n+2}$ adódik. □

Néhány teljes indukcióval belátható állítás a Fibonacci-számokra:

3. Tétel. *Minden $n \geq 1$-re $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.*

Bizonyítás. Az állítást az n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor $1 = F_1 = F_3 - 1 = 2 - 1$ teljesül. Tegyük föl, hogy $F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$. Ekkor $F_1 + \ldots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$, tehát az állítás igaz $n+1$-re is, így minden n-re. (Az első egyenlőségnél az indukciós feltevést, az utolsónál a Fibonacci-számok rekurzióját használtuk.) □

4. Tétel. *Minden $n \geq 1$-re $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.*

Az állítást az n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor $1 = F_1^2 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1$ teljesül. Tegyük föl, hogy $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$. Ekkor $F_1^2 + \ldots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$, tehát az állítás igaz $n+1$-re is, így minden n-re. (Az első egyenlőségnél az indukciós feltevést, az utolsónál a Fibonacci-számok rekurzióját használtuk.)