Gráfelméleti alapok

7. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.10.28.

1.

Gráfokkal a korábbi tanulmányainkban már találkoztunk. Szemléletesen a gráfokra úgy gondolunk, hogy a síkon meg vannak adva bizonyos *pontok* más szóval *csúcsok*, és közülük megadott párok össze vannak kötve. Egy-egy ilyen összekötő vonalat *élnek* nevezünk.

(Az egyértelműség kedvéért az élek legyenek olyanok, hogy a megadott pontok közül csak végpontjukon mennek át, vagyis az élről látjuk, hogy melyik két csúcsot köti össze.) Pontok és élek egy ilyen rendszerét fogjuk *gráfnak* hívni. Ennek alapján lényegtelen, hogy a pontok, ill. az összekötő élek hogyan vannak lerajzolva, csak az lényeges, hogy a pontok közül melyek vannak összekötve.

Ebben a fejezetben matematikailag pontos definíciót adunk erre fogalomra, megvizsgáljuk a jelentőségét, és bevezetünk később gyakran használt jelöléseket és fogalmakat.

1.1. Motiváció: Gráfok előfordulása

Használjuk modellként, kapcsolat vagy viszonyrendszer feltérképezésére és megértésére, esetleg vizualizálására.

Néhány példa szakpárok szerint

- Biológia: tápláléklánc. Idegsejtek hálózata.
- Fizika: villamos hálózati áramkör: soros és párhuzamos kapcsolások. Összekötött objektumok (fogyasztók, kondenzátorok, stb.) vagy csomópontok a csúcsok.
- Kémia: molekulák szerkezete: atomoknak felelnek meg a csúcsok és köztük fellépő kötések az élek (pl. szénhidrogének).
- Irodalom, Művészetek: művészeti hatások története; mely művésznek kik voltak közvetlen előfutárai, akik hatással voltak rá (valószínűleg az egyik fő érv az időrendi tanítás mellett).
- Pedagógia, pszichológia: szociometria
- Testnevelés: hagyományos focilabda: öt- és hatszögletű lapokból élek mentén összevarrva - ez egyébként a fullerén, a 60 szénatomos molekula modellje is; passztérkép egy mérkőzésen (élek a passzt adó és kapó játékosok között, ebből látszik hogy melyik játékos a támadások kulcsfigurája)
- Matematika (számelmélet): oszthatóság; osztópárok vagy osztó-többszörös kapcsolat az egész számok között.

További példák:

- közlekedési tervrajzok
- családfák
- ellátási hálózatok (kik a termelők, honnan szállítják a terméket nagy raktárakba, onnan hova kell még szállítani.)
- ismeretségi hálózat

Bizonyos problémák megoldása egészen világos, hogy gráfok segítségével írható le könnyen; lényegében gráfelméleti problémát vizsgálunk. Példák:

- utazó ügynök probléma: kliensek bejárása minél rövidebb útvonalon.

- minimális utazási idő a vár két távolabbi pontja között tömegközlekedéssel
- szénhidrogének száma adott mennyiségű szénatommal.
- Órarendi beosztás: Párok alkotása osztályok és tanárok osztály-tanár párok és heti órarendi órák között.

1.2. Kulcsfogalmak

1. Definíció (Egyszerű gráf)**.** *Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$, ahol $\binom{V}{2}$ a V halmaz kételemű halmazait jelöli.*
A V halmazt a gráf csúcshalmazának, V elemeit pedig csúcsoknak vagy pontoknak hívjuk. Az E halmaz a gráf élhalmaza

Példa: $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_1\}\}$. Ez egy négyzet négy csúcsának és négy oldalának megfeleltethető.

Konvenció/ egyszerűsítés: Az élhalmazt rövidebben így írhatjuk: $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\}$ Figyelem: itt a pároknál a sorrend nem számított, vagyis x_1x_2 és x_2x_1 ugyanazt az élet jelzi.

Miért hasznos ez az absztraktabb jelölés?
Nagyobb, vagyis sok csúcsot és élet tartalmazó gráf esetén az ábrázolás áttekinthetetlen, elveszhet információ.
Az ábrázolás jó szemléltetést ad, de meg is téveszthet. Például figyelnünk kell arra, hogy az összekötő vonalak véletlenül se menjenek át a végpontokon kívül más ponton. Az ábrázolás nem feltétlenül segít eldönteni, hogy mikor tekintünk két gráfot egyformának (*izomorfnak* - erről még lesz szó), hiszen látszólag egészen különböző ábrázolása is lehetséges ugyanannak a gráfnak. Vagyis ilyen értelemben nem az ábrázolási mód írja le pontosan a gráfot.

Emellett a formálisabb élmegadás adatrögzítés szempontból is sokkal hatékonyabb; így könnyű tárolni azt az információt hogy csúcsok össze vannak kötve. (Alternatíva erre az adatrögzítésre: minden csúcshoz kilistázzuk a szomszédait, vagyis azokat a csúcsokat akikkel élet alkot. Vagy: táblázatos módszer: egy $n \times n$-es táblázatban az i sor j. oszlopába írunk egyest, ha az i és j csúcs össze van kötve. ÁBRA)

1. Megjegyzés. *Néha hasznos az előző fogalom kiterjesztése. Bevezethetünk* ***párhuzamos élek****et is, vagyis egy csúcspár többször is szerepelhet az élek listájában. Előfordulhat, hogy értelmet adhatunk* ***hurokélek****nek is. Ilyenkor egy csúcsot önmagával kötünk össze.*
Időnként azt is megengedjük, hogy a gráfunk ne véges legyen, vagyis a csúcshalmazról (és ennek megfelelően az élhalmazról) nem követeljük meg hogy véges sok elemből álljon.

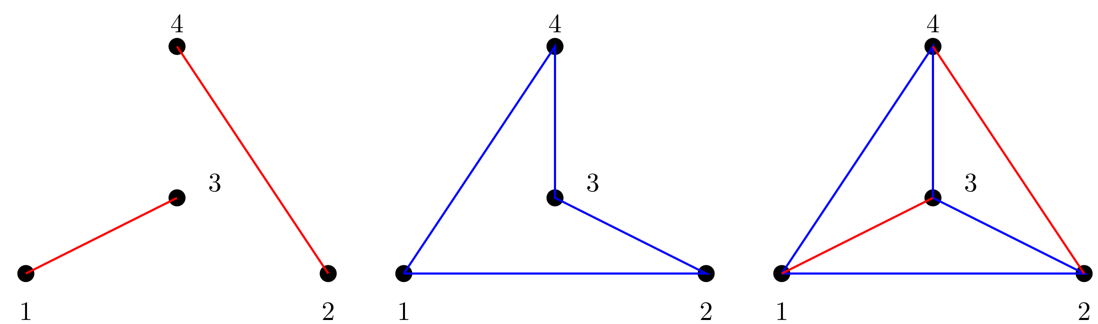
A csúcspárok által jelzett objektumok közötti viszony nem feltétlenül kölcsönös, hanem lehetséges hogy valamiféle egyirányúság jellemzi, mint pl. a családfák esetén. Ilyen esetben szerencsésebb, ha a modellünk az irányt is ki tudja fejezni.

2. Definíció (Irányított gráf)**.** *Irányított gráfon egy olyan $G = (V, E)$ párt értünk, ahol V egy véges halmaz (csúcsok), és az élek E halmazát rendezett V-beli párok halmaza: $E \subseteq V \times V$ adja meg. Egy (u, v) párra $(u, v \in V)$ gondolhatunk úgy, hogy egy u-ból v-be irányított nyíl reprezentálja.*

Példa: $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_1)\}$. Ez egy négyzet négy csúcsának és négy oldalának megfeleltethető, ahol az irányított élek "körben mennek". Mivel rendezett párról beszéltünk, most (u, v) és (v, u) élek (irányításukban) különbözőek.

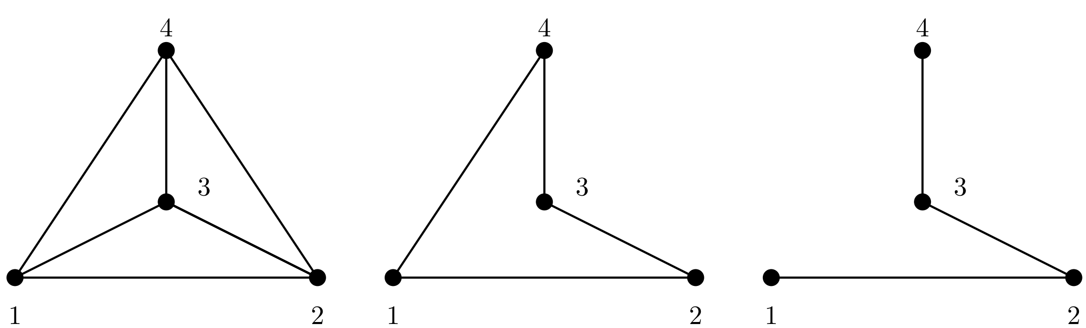
3. Definíció (Gráfelméleti alapfogalmak)**.**

- ***Fokszámok***. *Egy csúcs fokszáma a csúcsból induló élek száma. (ha esetleg van hurokél, azt kétszer számoljuk.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.*
- ***Szomszédos csúcsok.*** *u és v csúcsokat élszomszédosnak, vagy szomszédosnak nevezzük, ha él köti őket össze.*
- ***Gráf komplementere.*** *Egy egyszerű G gráf komplementere az az $\overline{G}$-vel jelölt gráf, amelyben minden csúcspár között megcseréljük az él és nem-él relációt, vagyis minden u, v csúcspárra $uv \in E(G)$ és $uv \in\ E(\overline{G})$ közül pontosan az egyik teljesül. ($E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$)*
- ***Teljes gráf n csúcson, K_n.*** *A teljes gráf olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs éllel össze van kötve. Az n pontú teljes gráfot K_n-nel jelöljük.*
- ***n csúcsú út, P_n.*** *Az út gráf olyan egyszerű gráf, amelynek csúcsait sorba lehet úgy rendezni, hogy pontosan a sorrendben egymást követő csúcsok vannak éllel összekötve. Az n csúcsú utat P_n-nel jelöljük. ($V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n\}$.)*
- ***n csúcsú kör, C_n, $n > 2$.*** *A körgráf olyan egyszerű gráf, amelynek csúcsait sorba lehet úgy rendezni, hogy pontosan a sorrendben egymást követő csúcsok vannak éllel összekötve, valamint s orrend szerinti első és utolsó. Az n csúcsú kört C_n-nel jelöljük. ($V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.)*
- ***Páros gráf (A és B csúcsosztályon).*** *G gráf páros gráf, ha csúcsai két osztályra bonthatóak (A és B) úgy, hogy G minden éle egy A és egy B-beli csúcsot köt össze.*
- ***Teljes páros gráf $n = a + b$ csúcson, $K_{a,b}$.***
$K_{a,b}$ olyan egyszerű gráf, melynek csúcsosztályát egy a és egy b elemű csúcsosztályra bonthatjuk, és él pontosan akkor köt össze két csúcsot, ha különböző osztályba tartoznak.



1. ábra. **Két független élből álló G balra; $\overline{G}$, vagyis G komplementere középen; uniójuk, K_4 jobbra.**

1. Következmény. *Ha $|V(G)| = n$, akkor $|E(G)| + |E(\overline{G})| = \binom{n}{2}$.*



2. ábra. **Teljes gráf K_4 balra, 4 csúcsú kör C_4 középen, 4 csúcs út P_4 jobbra.**

Motivációs feladat 1. Matild gólyavatóján a szakjáról 37-en vettek részt. Bizonyítsuk be, hogy volt közöttük, aki páros számú résztvevővel táncolt! (Párok táncoltak csak a bulin.)

A feladat elég rejtélyesnek tűnik, és úgy érezhetjük, néhány információ még hiányik ahhoz, hogy igazolhassuk az állítást. Ha gráfokkal modellezzük a kérdést: az embereket csúcsokkal jelüöljük, és élekkel azokat akik táncoltak egymással, egy gráfot kapunk. Feladatunk így annak megmutatása hogy lesz a gráfnak páros fokú csúcsa.

1. Tétel (Fokszámtétel)**.** *Tetszőleges G gráfban a fokszámok összege megegyezik az élszám kétszeresével. Vagyis:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

2. Következmény. *Minden gráfban a fokszámösszeg páros szám. A páratlan fokú csúcsok száma páros.*

A tétel bizonyítása. Kétszeres leszámolással bizonyítjuk. Számoljuk meg, hogy hány végpontja van az összes élnek! Egyrészt minden élnek 2 van, vagyis ez a szám $2|E(G)|$. Másrészt a végpontok csúcsok, vagyis csúcsonként is összegezhetünk a rájuk illeszkedő éleket megszámolva, így kapjuk a $\sum_{v \in V(G)} d(v)$ összeget. □

A 2 Következményből a motivációs feladat megoldása azonnal leollvasható: egy 37 csúcsú gráfban lesz páros fokú csúcs is, ha a páratlan fokú csúcsok száma páros.
A fokszámtétel egy variánsa azt mutatja, hogy páros gráfok esetén az élszámot még egyszerűbben is meg tudjuk határozni.

2. Tétel. *Egy páros gráfban az egyik osztály pontjai fokszámának összege megegyezik az élek számával, és így a másik osztály pontjai fokszámának összegével. Azaz, ha A és B a két osztály, ahol $V(G) = A \cup B$, akkor*

$$\sum_{v \in A} d(v) = |E(G)| = \sum_{v \in B} d(v).$$

A tétel bizonyítása. Elegendő azt észrevenni, hogy minden él pontosan egy A-beli és egy B-beli csúcsra illeszkedik. □

4. Definíció (Gráfok közötti kapcsolatok)**.**

- ***Részgráf***. *F gráf a G gráf részgráfja, ha megkapható G-ből csúcsok és élek elhagyásával. Ezt a kapcsolatot $F \subseteq G$-vel jelöljük.*
  (G-ből egy $v \in V(G)$ csúcs elhagyásával kapott $G - v$ gráfot úgy nyerjük, hogy $v \in V(G)$ csúcs törlése mellett azon éleket is töröljük, amelyek v-re illeszkedtek.)
- ***Feszítő részgráf***. *F gráf a G gráf feszítő részgráfja, ha megkapható G-ből élek elhagyásával. (Vagyis a csúcshalmazuk megegyezik.)*
- ***Feszített részgráf***. *F gráf a G gráf feszített részgráfja, ha megkapható G-ből csúcsok elhagyásával. (Vagyis a G csúcsainak egy részhalmazán F pontosan azokat az éleket tartalmazza, amiket G. Ez a csúcshalmaz "feszíti ki" az éleket F-ben.)*
- ***Izomorfia***. *A G és G' egyszerű gráfok* **izomorf***ak, ha létezik olyan $\varphi : V(G) \to V(G')$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcs esetén u és v akkor és csak akkor van összekötve G-ben, ha $\varphi(u)$ és $\varphi(v)$ össze van kötve éllel G'-ben. Jelölése: $G \simeq G'$.*
  Kevésbé formálisan azt mondhatjuk, hogy ha G csúcsainak átcímkézésével megkapjuk G' csúcsait úgy, hogy az él-reláció megmarad; vagyis a két gráf "megegyezik".

2. Megjegyzés. *A részgráf definíció megengedi hogy 0 darab élet és csúcsot hagyjunk el, vagyis minden gráf részgráfja önmagának. (Ezzel már láttunk analóg jelenséget: egy halmaz részhalmazai közé soroltuk a halmazt önmagát is.) Ha hangsúlyozzuk, hogy él vagy csúcs elhagyása valóban megtörténik, akkor* **valódi részgráf***ról beszélünk.*

3. Megjegyzés. *Azért van értelme a hétköznapi magyar "megegyező" szót kerülni az izomorfia esetén, mert előfordulhat például, hogy egy gráf két részgráfjáról szeretnénk beszélni: ilyenkor az is hangsúlyos, hogy nem azonosak, csak a szerkezetük azonos.*

1.3. Séták, összefüggőség

Egy v csúcsra illeszkedő élek megmutatták, hogy v csúcsból egy szomszédos csúcsba lépve hová lehet eljutni. A gráfok szerkezetét és fontos tulajdonságait is megérthetjük azáltal, ha meg tudjuk mondani, valamelyik v csúcsból mely más csúcsokba lehet néhány, vagy adott számú lépéssel eljutni - ha minden lépésnél egy csúcsból egy szomszédos csúcsba léphetünk.[1] Ezzel a céllal vizsgáljuk a **séták** fogalmát.

5. Definíció (Séták, körséták)**.**

Séta: *egy* $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_s, e_s, v_{s+1}$ *sorozat, ahol* $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$ *és az* e_i *él két végpontja éppen* v_i *és* v_{i+1}. *A* v_1 *csúcsot a séta kezdőpontjának,* v_{s+1}*-et a végpontjának nevezzük.*
Mondhatjuk úgy is, hogy a séta csúcsoknak olyan sorozata, hogy az egymást követő csúcsok szomszédosak. (Vegyük észre, hogy megengedett hogy csúcsok - vagy akár élek is - ismétlődjenek! Vagyis minden út séta, de nem minden séta út!)

Körséta: *olyan séta, amelyben* $v_1 = v_{s+1}$. *(*$s = 0$ *lehetséges). Zárt sétának is hívják.*

Világos, hogy egy u-ból v-be vezető út (ill. séta) megfordítása is út (ill. séta).
Igaz-e vajon, hogy u-ból v-be vezető és egy v-ből w-be vezető séta egymás után fűzése u-ból w-be vezető séta? Igen, a definició szerint ez világos.
Igaz-e vajon, hogy u-ból v-be vezető és egy v-ből w-be vezető **út** egymás után fűzése u-ból w-be vezető **út**? NEM feltétlenül! Vegyük észre, hogy előfordulhat, hogy az u-ból v-be és a v-ből w-be vezető utaknak van más közös pontja is, mint a v csúcs - ekkor olyan sétát kapunk, ami nem út.

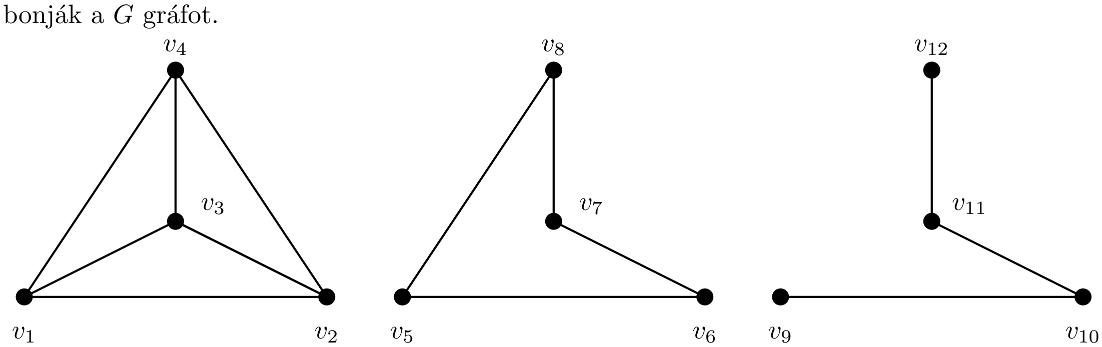
Teljesül azonban a következő:

1. Állítás. *Ha van olyan séta, amelynek kezdőpontja* u*, végpontja* w*, akkor van olyan út is, amelynek kezdőpontja* u*, végpontja pedig* w*.*

Valóban: ha egy pontot többször érintünk a séta során, akkor az első és utolsó érintése közötti sétát elhagyhatjuk. Ilyen lépésekkel elérhető, hogy egy sétából utat kapjunk.

6. Definíció (Összefüggő gráf)**.** *G gráf összefüggő, ha bármely* u, v *pontpárja esetén van* u*-t és* v*-t összekötő út a* G*-ben.*

Korábbi megfontolásunk lehetővé teszi, hogy elegendő legyen bármely u, v pontpárja esetén u-ból induló és v-be érkező G-beli sétát mutatni. Sőt, elegendő annyit megkövetelni az összefüggőséghez, hogy egy u pontból tetszőleges v pontba el lehessen sétálni: hiszen ekkor bármely v és w között is vezet séta (u-n keresztül).
Amennyiben G gráf nem összefüggő, akkor $u \in V(G)$-ből nem fogunk tudni találni utat minden más G-beli csúcsba. Nézzük azt a feszített részgráfot, ami azon csúcsokból áll, amikbe vezet G-beli út u-ból. Ezt a G gráf u-t tartalmazó **összefüggőségi komponens**ének hívjuk. Összefüggő gráfnak egyetlen komponense van, egyébként pedig a különböző komponensek diszjunktak, amint láttuk. A G gráf összefüggőségi komponensei összefüggő gráfok diszjunkt uniójára bonják a G gráfot.



3. ábra. **Egy 12 csúcs gráf, aminek 3 összefüggőségi komponense van**

[1] Egy érdekes kapcsolódóú tény: A világ emberiségének ismeretségi hálózatában pl. minden bizonnyal midnen hallgatótól legfeljebb 6 ismeretségi kapcsolat távolságban megtalálható az amerikai elnök. Ez sokmindent elmond globális világunkról.

1.4. Fák

7. Definíció. *A G gráfot* ***fá****nak nevezzük, ha összefüggő és körmentes. Ha G körmentes, akkor* ***erdő****nek nevezzük (hiszen komponensei fák).*
A G gráf F részgráfját G feszítő fájának nevezzük, ha F fa és csúcshalmaza G minden csúcsát tartalmazza.

Fával már találkoztunk, amikor a "döntési fa" modellt vizsgáltuk. Könnyű látni, hogy az úgy felrajzolt gráfok valóban fát adnak meg. Fagráf lesz az egy csúcsból álló, és az összekötött csúcspárból álló gráf is. Ezeket korábban már jelöltük is: K_1, K_2 (mert teljes gráfok), ill. P_1, P_2, mert utak.
Általában minden n csúcsú P_n út fa. Fa lesz az olyan n csúcsú összefüggő gráf is, aminek az élhalmaza egy kijelölt csúcsra illeszkedő élekből áll, ezt S_n jelöli. (A nevek az angol elnevezésre utalnak: *path, star*). Későbbiekben sok más, kevésbé "szabályos" fát is látunk majd.

2. Állítás. *Minden összefüggő gráfnak van feszítő fája.*

Folytassuk a következő eljárást: ellenőrízzük az éleket, és ha találunk egy olyat, aminek elhagyása után még összefüggő marad a gráf, azt hagyjuk el. Az eljárás végén olyan gráfot kapunk, ami nyilván összefüggő. Másrészt körmentes is. Ezt indirekt módon igazoljuk. Ha az eljárás végén kapott gráfban lenne egy kör, akkor megmutatjuk, hogy még tudnánk folytatni az élelhagyási lépéseket. Egy körből tetszőleges élet elhagyva a kör csúcsai egymásból úton elérhetőek maradnak. Így ha az élelhagyás előtt összefüggő volt a gráf, akkor a körből egy tetszőleges élet elhagyva is az marad.

3. Állítás. *Legalább két csúcsú, legalább egy élű körmentes gráfban van (legalább két) elsőfokú csúcs.*

Vegyük a gráfban a leghosszabb út részgráfot. Egy leghosszabb út végpontjaiból csak ezen út valamely pontjához vezethetne él, mert ő leghosszabb. A körmentesség miatt azonban ide sem mehet él, azaz a végpontok elsőfokúak.

4. Állítás. *Ha egy gráf minden csúcsának foka legalább kettő, akkor van a gráfban kör.*

8. Definíció. *Fa egy* ***elsőfokú csúcsát levél****nek nevezzük.*

Most megvizsgáljuk, miként jellemezhetnánk még a fákat. Az alább felsorolt tulajdonságok egymásból levezethetőek, vagyis bármelyiket vehetnénk alternatív definíciónak.

Fák alternatív definíciói: Egy $n \geq 2$ csúcsú gráfra ekvivalensek:
(i) összefüggő és körmentes (azaz fa);
(ii) bármely két pontját pontosan egy út köti össze.
(iii) összefüggő, de bármely élét törölve már nem marad az (fa = minimális összefüggő gráf);
(iv) nem tartalmaz kört és bármely két (összekötetlen) pontját összekötve pontosan egy kör keletkezik (fa = maximális körmentes gráf).

Bizonyítás.
(i) $\rightarrow$ (ii): összefüggőség miatt van út tetszőleges pontpár között, körmentesség miatt nem lehet több út is.
(ii) $\rightarrow$ (iii): az összefüggőség definíciója teljesül. Mivel bármely él egy út is két szomszédos csúcs között, és csak egyetlen út köti ezeket a csúcsokat össze, az összekötő él törlése megszünteti az összefüggőséget.
(iii) $\rightarrow$ (iv): kört nem tartalmazhat, mert körből egy összefüggő gráfban törölhető volna egy él az összefüggőség sértése nélkül. Ha egy tetszőleges v és w csúcspár nincs összekötve, akkor közöttük az összefüggőség miatt létezik út, ám ezt egy uw él körré zárná be.
(iv) $\rightarrow$ (i): az összefüggőséget kell igazolni ezen ponton. Mivel tetszőleges u, v csúcspár vagy össze van kötve, vagy ha nem lenne, akkor a gráfban létezik őket összekötő út, amit az uv él körré zárna be, ezért az összefüggőség definíciója teljesül. □

Fanövesztés
Hogyan gyártsunk fagráfokat? Néhány családdal már találkoztunk, most megmutatjuk, milyen eljárással lehet generálni az összes fát.

5. Állítás. *Induljunk ki az* 1*-csúcsú fából, ami egy pontból áll. Minden $n > 1$ csúcsú fa előáll valamelyik $n-1$ csúcsú fából úgy, hogy felveszünk egy új csúcsot és összekötjünk az $n-1$ csúcsú fa valamelyik csúcsával.*

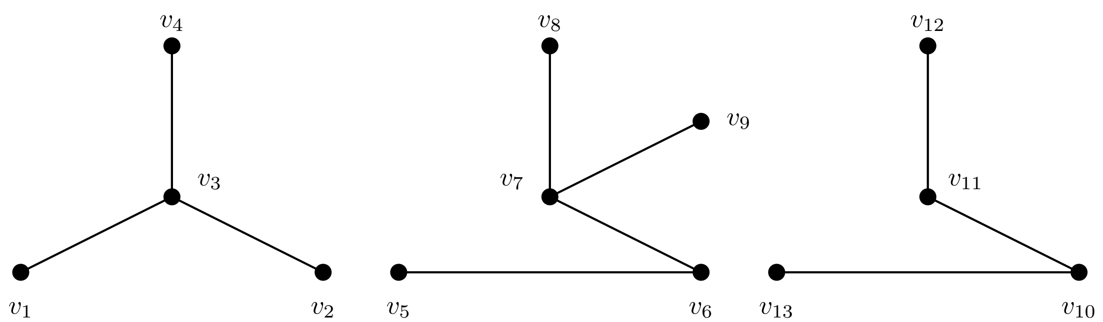
(Vegyük észre, hogy a végrehajtott lépés valóban összefüggő, és körmentes gráfot, vagyis fát ad!)

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Kezdőlépés: $n = 2$-re az állítás igaz. Az indukciós lépésben azt kell megmutatnunk, hogy ha az $n-1$-élű fákat ilyen módon mind megkaphattuk, akkor igaz ez az n-élű fákra is. Kiindulunk egy n-élű F fából. Elhagyjuk az egyik w levelét (elsőfokú csúcsát), ami 4 állítás szerint létezik. A kapott gráf körmentes, mert egy n-csúcsú fagráfnak (körmentes összefüggő gráfnak) részgráfja. Másrészt a kapott gráf nyilván összefüggő is, hiszen tetszőleges csúcspárja összeköthető F-ben úttal, de ez az út nem mehetett át a levélen.
Ezzel beláttuk, hogy a kapott $F - w$ gráf egy $n - 1$ csúcsú fa, amit viszont az indukciós feltétel szerint elő tudtunk állítani az eljárásunkkal. $F - w$-hez hozzánövesztve a levelet így megkapjuk F fát is. □

3. Tétel. *n csúcsú fának $n - 1$ éle van.*

Bizonyítás. Az állítás a fanövesztő eljárásból, vagyis 5 állításból azonnal adódik, hiszen eszerint egy n-csúcsú fa megkapható az 1-csúcsú 0 élű fából $n - 1$ új csúcs és $n - 1$ új él hozzávételével. □

3. Következmény. *n csúcsú, k komponensű erdőnek (körmentes gráfnak) $n - k$ éle van. Tehát n csúcsú körmentes gráfnak (erdőnek) legfeljebb $n - 1$ éle van.*



4. ábra. **Három diszjunkt fa, köztük egy S_4 csillag (balra) és egy P_4 út (jobbra)**

4. Tétel. *Egy $n \geq 2$ pontú gráfra ekvivalensek az alábbiak:*
(i) Nem tartalmaz kört és $n - 1$ éle van;
(ii) összefüggő és körmentes (azaz fa);
(iii) összefüggő és $n - 1$ éle van;

Bizonyítás. (i) → (ii): Csúcsszám szerinti teljes indukcióval, $n = 2$-re triviális. Vegyünk egy elsőfokú pontot. Ezt elhagyva $n - 1$ csúcsú, $n - 2$ élű továbbra is körmentes gráfot kapunk. Az indukciós feltevés szerint ez összefüggő, de akkor az eredeti gráf is.
(ii) → (iii): Ez a fenti tétel.
(iii) → (i): összefüggő és $n - 1$ élű gráfban nem lehet kör, mert annak egy élét elhagyhatnánk 2 állítás eljárása szerint. Akkor viszont $n - 2$ élű és n csúcsú összefüggő gráfot kapnánk, ami 3 következmény szerint nem lehetséges. □

1.5. Fokszámsorozatok és egyszerű gráfok

A fokszámtétel megmutatta, hogy ha adott egy n-tagú számsorozat, akkor nem biztos hogy létezik olyan gráf, aminek a fokszámai a megadott számok. Szükséges a gráf létezéséhez az a feltétel, hogy a számok összege páros legyen, és persze az is, hogy minden szám egész legyen a $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$ halmazból.
Ha ennyit garantálunk, az azonban még nem elegendő ahhoz, hogy ténylegesen létezzen is olyan gráf ami a fokszámsorozatot realizálja!
Most mutatunk egy szükséges és elégséges feltételt.

6. Állítás. *Ha létezik egyszerű gráf a $d_1 \leq \ldots, \leq d_n$ fokszámokkal, akkor tetszőleges k-ra*

$$d_1 + \ldots + d_{n-k} \geq d_{n-k+1} + \ldots + d_n - k(k - 1).$$

Bizonyítás. Nevezzük a $d_1, \ldots, d_{n-k}$ csúcsokat kis fokúaknak, a többit nagynak. Adjunk becslést az olyan élek számára, amelyek egyik végpontja kis fokú, a másik végpontja nagy. Egyfelől az ilyen élek száma legfeljebb $d_1 + \ldots + d_{n-k}$, hiszen a kis fokú csúcsokból összesen ennyi indul. (Minden olyan él, ami két kis fokú csúcsot köt össze, kettővel csökkenti a kis-nagy élek számát.) A nagy fokú csúcsok oldaláról számolva, egy d_i fokú csúcsból legfeljebb $k - 1$ él mehet nagy fokú csúcsba, így legalább $d_i - (k - 1)$ él kell kis fokú csúcsba menjen. Összeadva ezt a nagy fokú csúcsokra alsó becslést kapunk a megszámolni kívánt élekre. Összevetve a korábbi felső becsléssel éppen a kívánt állítást kapjuk. □

Az állítás szemléletes tartalma tehát az, hogy a csúcsokat kis és nagy fokszámúakra bontva a kis fokszámú csúcsok képesek legyenek befogadni azokat az éleket, amelyek a nagy fokú csúcsokból muszáj, hogy kis fokúakhoz menjenek. Mivel ez szükséges feltétel, segítségével azt láthatjuk, hogy az adott fokszámsorozat nem realizálható egyszerű gráffal. Ha találunk olyan k-t, amelyre nem teljesül az állításbeli feltétel, akkor nem létezhet egyszerű gráf az adott fokszámokkal. A most következő állítás egyben eljárást is ad a kérdés megválaszolására. Szemléletesen úgy fogalmazhatjuk meg, az állítást, hogy ha van adott fokszámokkal egyszerű gráf, akkor van olyan egyszerű gráf is az adott fokszámokkal, amelyben a legnagyobb fokú csúcs a közvetlenül utána következő legnagyobb fokúakkal van összekötve.

7. Állítás. *Akkor és csak akkor létezik egyszerű gráf a $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ nemnegítv egész fokszámokkal, ha létezik egyszerű gráf a $d'_1, \ldots, d'_{n-1}$ fokszámokkal, ahol $d'_k = d_k$, ha $k = 1, \ldots, n - d_n - 1$, és $d'_k = d_k - 1$, ha $k = n - d_n, \ldots, n - 1$.*

*A tétel egyszerű eljárást ad $d_1, \ldots, d_n$ fokszámsorozat realizálására egyszerű gráffal (**Hakimi-algoritmus**): A legnagyobb fokú pontot kössük össze az utána következő legnagyobb fokú pontokkal. Töröljük a legnagyobb fokú pontot, csökkentsük eggyel a vele összekötött pontok fokszámát. Ezt az eljárást ismételve felrajzolhatunk egy $d_1, \ldots, d_n$ fokszámokkal rendelkező gráfot. (Menet közben a csúcsok sorrendje változhat!) Akkor akadunk el, ha valamelyik csúcs foka nagyobb, mint ahány tőle különböző csúcs van. Ilyenkor az eredeti fokszám-sorozat nem realizálható egyszerű gráffal. Természetesen lehet, hogy a fenti eljárással kapott gráffal nem izomorf is lehet realizálni az adott fokszám-sorozatot. Ha tehát azt sejtjük, hogy az adott fokszám-sorozat realizálható, akkor a Hakimi-algoritmus megad egy olyan egyszerű gráfot, amelyben a fokszámok éppen az előírtak.*