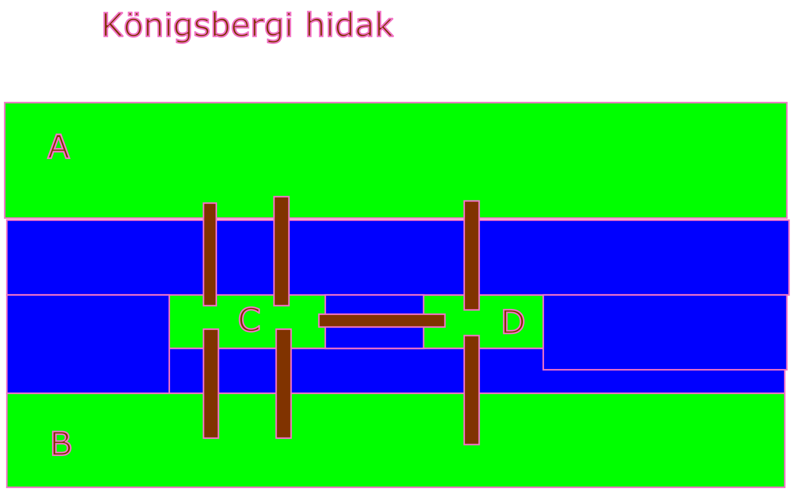
Euler-körséták, Hamilton-körök

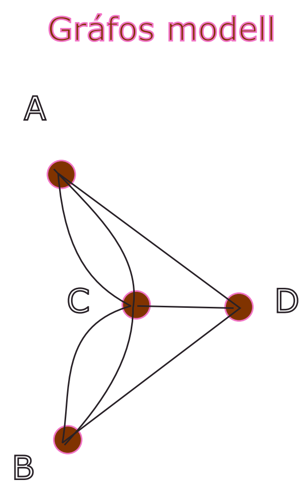
9. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.11.

1. Euler séták, körséták

Motivációs feladat 1. Königsbergi hidak. Végig lehet-e menni a Pregel folyó összes hídján Königsbergben úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladjanak át, és egyúttal visszaérjenek a kiindulópontba?





A problémát Euler oldotta meg 1736-ban. Megoldásában ugyan még nem a mai gráfelméleti terminológiát használta, de számunkra egyszerűbb a következő megfogalmazási mód: a térkép összefüggő földrészeinek pontokat, a híddal való összeköttetéseknek éleket megfeleltetve, van-e olyan **körséta a kapott G gráfban, ami minden élet pontosan egyszer használ**?

1. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy G-ről esetünkben nem tettük fel, hogy egyszerű gráf, és a königsbergi hidak rendszerének nem is egyszerű gráfot feleltettünk meg, hiszen vannak párhuzamos élei is.*

1. Definíció. *Egy G gráfbeli* ***sétát Euler-sétá****nak nevezünk, ha G* ***minden élét egyszer használja****.*
Egy G gráfbeli ***körsétát Euler-körsétá****nak nevezünk, ha G* ***minden élét egyszer használja****.*
Ha egy séta nem körséta, akkor nyílt sétának hívjuk.

1. Állítás.
(1) *Minden nyílt séta a két végpontjánál páratlan sok, a belső pontjainál páros sok élet használ.*
(2) *Minden körséta minden csúcsánál páros sok élt használ.*

Bizonyítás. Legyen v egy séta belső pontja (azaz se nem kezdő-, se nem végpont). Ekkor ahányszor a séta belép v-be, annyiszor ki is lép, tehát páros sok v-ből induló élt használ. Az első lépésnél a séta kezdőpontjába nem kell belelépnünk, és az utolsó lépésnél a végpontból nem kell kilépnünk. Ha a sétánk kezdő és végpontja különböző, vagyis nem körséta, akkor a kezdőpontnál pontosan eggyel több élt használunk kilépésre, mint belépésre, a végpontnál pedig pontosan eggyel többet belépésre, mint kilépésre; így ezeknél páratlan sok él van a sétában. Ha a körsétáról van szó, akkor az első (pár nélküli) kilépés és az utolsó (pár nélküli) belépés ugyanannál a csúcsnál található, így ott is páros sok élt használunk. □

1. Lemma. *Tegyük föl, hogy egy G gráfban minden csúcs foka páros. Tekintsünk egy olyan $v \in V(G)$ kezdőpontú sétát, ami tovább nem bővíthető (azaz a végpontjából nem indul olyan él, amit a séta nem tartalmaz) és minden élet legfeljebb egyszer használ. Ekkor*
(1) a séta végpontja is v, vagyis a séta körséta;
(2) a séta éleit elhagyva a maradék gráf minden csúcsának foka páros lesz.

Bizonyítás. (1) Legyen u az a csúcs, ahol elakadtunk, vagyis a séta végpontja. Az elakadás azt jelenti, hogy minden élet használtunk a sétában, ami u-ra illeszkedik, másrészt az utolsó élen beléptünk u-ba. Az 1. állítás szerint ez csak akkor fordulhat elő, ha körsétát tettünk, és $u = v$ a kezdőpont.

(2) Minden csúcsnál páros sok élt használtunk a sétánál. Ezeket az éleket elhagyva minden fokszám páros számmal csökken, így ismét páros lesz. □

2. Megjegyzés. *Ilyen sétát könnyen találunk a gyakorlatban: elindulunk v-ből, és addig lépünk élek mentén csúcsról csúcsra (minden élt legfeljebb egyszer használva, hiszen sétáról van szó), míg el nem akadunk. Elméleti úton is könnyű találni ilyet: vegyük a v kezdőpontú Euler-séták közül az egyik leghosszabbat; ez persze nem bővíthető, hiszen akkor volna hosszabb séta is.*

1. Tétel. *Tegyük föl, hogy $G = (V, E)$ összefüggő gráf. Ekkor*
(1) *G-ben van Euler-körséta $\iff$ minden csúcs foka páros;*
(2) *G-ben van nyílt Euler-séta $\iff$ pontosan két páratlan fokú csúcs van.*

Bizonyítás. Mindkét esetben a ($\Rightarrow$) irány közvetlenül adódik az 1. Állításból. Nézzük meg, hogy a fokszámokra vonatkozó állításból miként következik az Euler-séta létezése!

(1), ($\Leftarrow$): Legyen $v_0 \in V$ tetszőleges csúcs, és vegyük a leghosszabb, vagyis legtöbb élet tartalmazó sétát, ami minden élet legfeljebb egyszer tartalmaz. Jelölje $V' \subset V$ a séta által tartalmazott csúcsok, $E' \subset E$ pedig a séta által tartalmazott élek halmazát. Azt fogjuk megmutatni, hogy $E' = E$, tehát a séta átmegy G összes élén. Tekintsük a séta által bejárt $G' = (V', E')$ részgráfot. Ez persze összefüggő. Két esetet vizsgálunk:

1. eset. Ha V' valamely v csúcsából kiindul egy $E \setminus E'$-beli él, hagyjuk el G-ből a maximális séta élhalmazát, és tekintsük a $G'' = (V, E \setminus E')$ részgráfot. 1. lemma (2)-es pontja szerint G''-ben minden fok páros. Mivel v foka nem nulla, vehetünk egy v kezdőpontú körsétát G''-ben. Most csinálunk egy hosszabb sétát, mint amiről feltettük, hogy a leghosszabb. Induljunk el v_0-ból az első séta mentén, míg el nem érünk v-be. Járjuk be innentől a G''-ben talált körsétát, majd v-be visszaérve folytassuk sétánkat a G-beli maximális séta szerint. Így egy olyan v_0 kezdőpontú körsétát kapunk, ami hosszabb az eredetinél. Mivel az először választott körsétáról feltettük, hogy az a leghosszabb ilyen, ez nem lehetséges, tehát ez az eset nem állhat fenn.

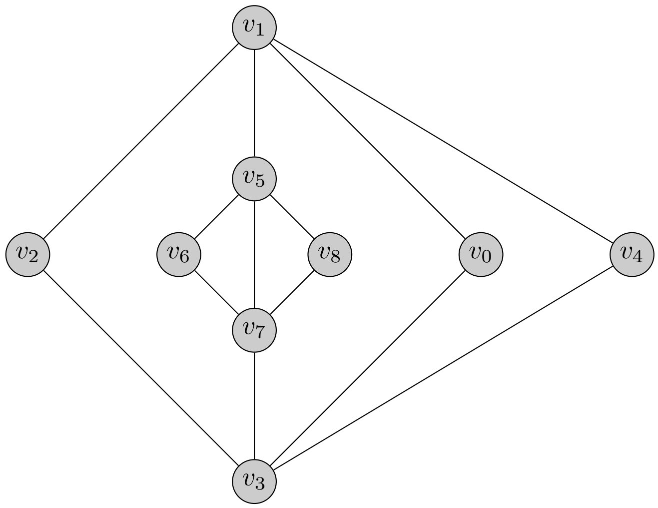
2. eset Ha V' egyik v csúcsából sem indul ki $E \setminus E'$-beli él, akkor $G' = (V', E')$ részgráf egy összefüggőségi komponens. Mivel G összefüggő, ekkor $G' = G$, tehát $E = E'$ valóban fennáll.

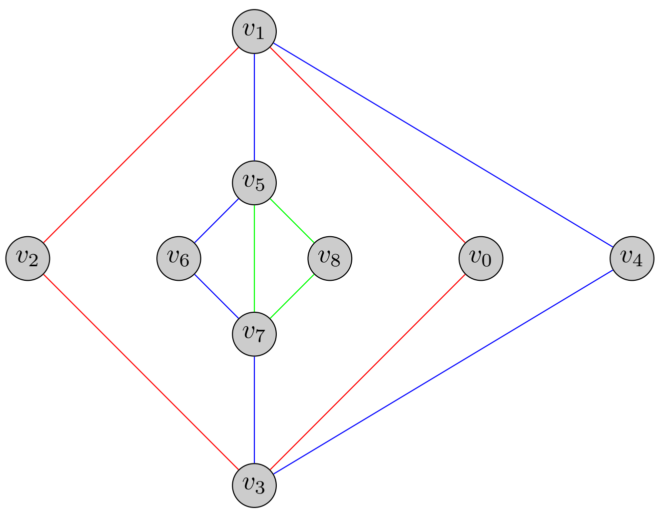
(2), ($\Leftarrow$): Vegyünk egy új w csúcsot, és kössük össze a két páratlan fokú csúccsal. Az új gráf is összefüggő, és benne minden csúcs foka páros; így van benne Euler-körséta. Ezt bármelyik csúcsból indulva bejárhatjuk; járjuk be w-ből. Elhagyva az első és az utolsó lépést, pont G-nek egy nyílt Euler-sétát kapjuk. □

Vegyük észre, hogy a bizonyítás egy, a gyakorlatban is jól alkalmazható eljárást ad Euler-séta megtalálására (összefüggő, csupa páros fokú gráfban): vegyünk egy tetszőleges v_0 csúcsot, és növeljünk onnan indulva egy sétát, míg el nem akadunk. Ha az összes élet bejártuk, készen vagyunk. Ha nem, akkor a bejárt csúcsok közt találunk olyat, amiből indul még be nem járt él. Ebből a csúcsból indítsunk ismét egy sétát elakadásig; ez zárt séta lesz, amit a bizonytásban látott módon befűzhetünk az eredeti sétába. Ezáltal növeltük az eredeti Euler-séta hosszát. Ezt minden esetben meg tudjuk tenni, amíg nem Euler-sétánk van; az eljárás pedig nyilván véget ér, mert az élek elfogynak.

Az 1. tétel jól magyarázza a következő elnevezést

2. Definíció. *Egy G gráfot Euler-gráfnak nevezünk ha összefüggő és minden csúcsának foka páros szám.*





1. ábra. A G gráf Euler-gráf: minden fokszáma páros. v_0-ból induló séta v_0-ban véget ért (piros), de bővíthető, például ha a piros úton v_1-be érve a kék körön sétálunk végig, majd v_1-be visszatérve a piroson befejezzük a sétát. Még ez is bővíthető, ha a kék útszakaszon a v_5-be érve beillesztjük a zöld körsétát. Így a gráf Euler-körsétáját nyerjük.

2. Hamilton-körök, Hamilton utak

3. Definíció. *A G gráf egy körét* ***Hamilton-kör****nek nevezzük, ha a gráf minden csúcsán átmegy. Hasonlóan, egy út részgráfját* ***Hamilton-út****nak hívjuk, ha a gráf minden csúcsán átmegy.*

3. Megjegyzés. *Hamilton-körökhöz kapcsolódott az utazó ügynök probléma, amikor bármely két város (csúcs) között van valamilyen hosszúságú útvonal -ennek egy élsúllyal ellátott élet feleltethetünk meg-, és szeretnénk megkeresni azt a körbejárást, ami a lehető legrövidebb, vagyis legkisebb élsúly-összegű.*

Hamilton-kör, amint majd látjuk, nem létezik minden gráfban.
Az Euler-körséta esetén tudtunk olyan feltételt mondani, ami szükséges is volt a körséta létezéséhez összefüggő gráfokban, de elegendő is, vagyis:
• a feltétel (minden fokszám páros), ha nem teljesül, biztosan nincsen körséta: szükséges feltétel.
• a feltétel maga után vonja a körséta létezését, vagyis elég ennyit ellenőrizni: elegendő.

Hamilton-körök esetén csak olyan feltételt tudunk megfogalmazni, ami szükséges, vagy olyat, ami elegendő. Pontos karakterizációt nem fogunk tudni adni, vagyis lesz olyan gráf, aminél a szükséges feltétel fennáll, de az elegendő feltétel nem.

Motivációs feladat 2. Van-e Hamilton kör az 1 ábrán látott G gráfban?
Van-e Hamilton út a $K_{20,22}$ teljes páros gráfban?

A Hamilton-kör létezésének egy szükséges feltétele az alábbi.

2. Tétel (Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére)**.** *Ha egy Hamilton-kört tartalmazó gráfból k csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a maradék gráfnak legfeljebb k komponense van.*

Bizonyítás. Tekintsük csak gráf Hamilton körét. Ha ennek k csúcsot megjelöljük, amiket ki szeretnénk majd törölni, k útra bontjuk a gráfot, aminek a végpontjai a kijelölt csúcsok. Ezeket törölve legfeljebb k összefüggő komponenst kapunk a Hamilton-körben. A gráf további éleit is figyelembe véve a komponensek száma nem csökken. □

Hasonló szükséges feltétel mondható Hamilton-utakra is. Ez az előző bizonyításból azonnal látható, hiszen egy út k csúcsának törlése legfeljebb $k+1$ útszakaszra osztja fel az utat.

3. Tétel (Szükséges feltétel Hamilton-út létezésére)**.** *Ha egy Hamilton-utat tartalmazó gráfból k csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a maradék gráfnak legfeljebb $k+1$ komponense van.*

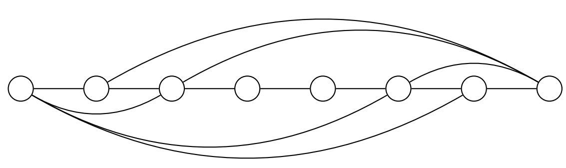
A tanult tételekkel könnyű látni a választ a motivációs feladatra: G-ben nem találhatunk semmiképp Hamilton utat, mert a v_1, v_3 csúcspár elhagyásával szétesik a gráf 3 részre. $K_{20,22}$ teljes páros gráfnak pedig egy olyan csúcsosztálya van, ami 20 elemű, és elhagyásával 22 izolált csúcs keletkezik. A fenti tétel értelmében ekkor nem lehet $K_{20,22}$-ben Hamilton út sem.

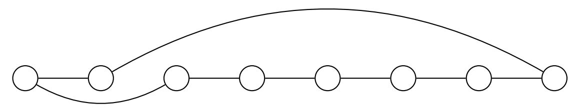
Most megnézzük, milyen feltétel teljesülése garantálhatja a Hamilton-kör létezését.

Egy elégséges feltételt ad meg a következő tétel.

4. Tétel (Dirac)**.** *Ha egy $n > 2$ csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.*

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítva tegyük fel, hogy a gráfban nincs Hamilton-kör és húzzunk be éleket mindaddig, amíg nem is keletkezik. Nézzük azt a gráfot, amelybe már nem tudunk további éleket behúzni anélkül, hogy Hamilton-kör ne keletkezzék. Persze az élek behúzásával csak növeltük a fokszámokat, így erre a gráfra is teljesül a feltétel, hogy minden fokszám eléri az $n/2$ értéket.
Mivel $n > 2$ esetén egy teljes gráfban nyilván van Hamilton kör, nekünk még az összes él behúzása előtt meg kellett állnunk. Legyen pl. x_1 és x_n két összekötetlen pont. Ha az ezek közti élt behúznánk, keletkezne Hamilton-kör, ami azt jelenti, hogy az eredeti gráfban volt x_1-ből x_n-be vezető Hamilton-út, azaz az eredeti gráf csúcsai felsorolhatók egy olyan $x_1, \ldots, x_n$ sorozatban, hogy $\{x_i, x_{i+1}\}$ él minden $i = 1, \ldots, n-1$-re.
Tekintsük x_1 szomszédait és x_n szomszédait. Ha valamilyen i-re ($i \geq 2$) az lenne a helyzet, hogy x_i szomszédja x_1-nek és x_{i-1} szomszédja x_n-nek, akkor gráfunkban $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_i, x_1$ Hamilton-kör lenne. (Itt a körnek csak a csúcsait tüntettük fel, az élek a szomszédos csúcsok alkotta párok; ez egyszerű gráf esetén elég.) Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy ha x_1 és x_n foka legalább $n/2$, akkor ilyen pontpár kell legyen. Nézzük x_1 szomszédait. Ilyen legalább $n/2$ van, köztük x_2. Jelöljük meg az ezeket közvetlenül megelőző pontokat pirossal. Így legalább $n/2$ piros pontot kaptunk (köztük x_1-et). Olyan pont, ami nincs pirossal megjelölve, legfeljebb $n - n/2 = n/2$ lesz. Jegyezzük meg, hogy x_n biztosan nincs pirossal megjelölve. Mivel x_n-nek saját magán kívül legalább $n/2$ szomszédja van, összesen pedig n csúcsunk van, lesz olyan piros pont, amely x_n-nek szomszédja. Akkor viszont a fentebbi okoskodással mégis találtunk Hamilton-kört, vagyis ellentmondásra jutottunk. □





2. ábra. Egy Hamilton út, amelynek két végpontjának szomszédait is berajzoltuk (fent), majd megtaláltunk a szomszédok között két egymást követőt, amik segítségével a Hamilton-út Hamilton-körré bővíthető.
Ugyanez az okoskodás adja Dirac tételének Ore-től származó alábbi élesítését is.

5. Tétel (Ore tétele)**.** *Ha egy n csúcsú egyszerű gráfban minden összekötetlen x, y csúcspárra teljesül $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.*