Gráfok színezései

10. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.11.

Motivációs feladat 1. Bergengóciában a középkorban nagyon ügyeltek az útépítők, hogy felesleges munkát ne végezzenek, így aztán minden városból el lehet jutni a többi városba, de mindegyik városba csak pontosan egyféle úton. Útelágatás csak városközpontban lehetséges. A Bergengóc király elrendeli, hogy minden városközpontban zöld vagy fehér karácsonyfát állítsanak. Hoppmestere még azt is előírja, hogy valamely útvonalon szomszádos városok mindenképpen különböző színű fát kapjanak. Teljesülhet-e a kívánság?

1. Definíció. *Egy G gráf jó csúcs-színezése k színnel azt jelenti, hogy minden csúcsot kiszíneztünk a k szín valamelyikével, és bármely két szomszédos csúcs színe különböző.*
A gráf színezési száma*, más néven* ***kromatikus száma*** *az a legkisebb k szám, ahány színnel létezik G-nek csúcsszínezése. $\chi(G)$-vel jelöljük.*
Egy adott színezés csoportokba osztja a csúcsokat a színek szerint, ezeket hívjuk színosztályoknak.

0.1. Színezés két színnel

1. motivációs feladatunkban a várostérképet nem ismerjük. A választ mégis meg tudjuk adni, ha észrevesszük, hogy korábbi témakörükben tanultak alapján a városok, mint csúcsok között megadott, élekkel jelezhető úthálózat egy fagráf lesz. A városi karácsonyfa színét hozzárendelhetjük a városhoz. Eszerint a gráf jó színezési számáról kérdez a feladat.

1. Állítás. *Ha G egy fa, akkor $\chi(G) = 2$, vagyis csúcsai két színnel jól megszínezhetőek.*

Bizonyítás. Algoritmust adunk meg, ami megszínezi a fagráfot. Tekinsük csúcsoknak azt a sorrendjét, amilyen módon a *fanövesztést* megvalósíthatjuk: a sorban következő csúcs mindig egyfokú lesz (levél). Ez azt jelenti, hogy ha olyan színűre színezzük, ami nem egyezik meg a szomszédja színével, akkor egy jó színezését kapjuk a fának. □

Valójában a 2 színnel kiszínezhető gráfok körét már korábban leírtuk:

1. Tétel. *Ha G gráfban van él, akkor G pontosan akkor páros gráf, ha $\chi(G) = 2$.*

Bizonyítás. Ez a páros gráf definíciójából is következik, hiszen páros gráf esetén a csúcsok kettébontása megadja egy jó színezés két színosztályát. Kettőnél kevesebb színnel biztosan nem színezhetünk, ha van a gráfban él. Másrészt egy jó két színnel színezés automatikusan igazolja a gráf páros voltát. □

A páros gráfok jellemzésére gyakorlaton sor kerül(t) a köreik hosszával - innen is származik a nevük. Ezt most átismételjük, kezdve egy egyszerű észrevétellel.

2. Állítás. *Legyen $k \geq 2$ egész szám. Ekkor $\chi(C_{2k}) = 2$, ugyanakkor $\chi(C_{2k-1}) = 3$.*

Ez mutatja azt is, hogy páratlan körök jelenléte megakadályozza, hogy egy gráf két színnel színezése megvalósítható legyen. Ezzel szemben, ha nincs páratlan kör a gráfban, a színezés megvalósítható:

3. Állítás. *Páros gráfban minden kör páros hosszúságú, ugyanakkor ha egy gráfban minden kör páros hosszúságú akkor a gráf páros.*

Bizonyítás. Páros gráfban világos hogy nem lehet benne részgráfként C_{2k+1} páratlan kör: a kör csúcsait sorban $v_1, v_2, \dots v_{2k+1}$-gyel jelölve, a kör élei alapján v_1-gyel egy csúcsosztályba kell kerüljön minden páratlan indexű csúcs, a másik csúcsosztályba a páros indexűek. Mivel azonban $v_{2k+1}v_1$ is él a körben, ellentmondásra jutunk.
Másrészt, válasszunk ki egy összefüggőségi komponenst, és ebben egy v_0 csúcsot. Ha v_0 egy páros gráf A osztályába kerül, akkor v_0 szomszédai a másik, B osztályba. Ezt folytatva, megnézhetjük minden w csúcsra, hogy v_0-ból mekkora a legrövidebb út hossza ami w-be vezet. A osztályba sorolhatjuk azokat a csúcsokat, ahonnan a legrövidebb út hossza páros, B-be azokat, ahová a legrövidebb út páratlan hosszú. Mivel nincs páratlan kör a gráfban, az így definiált A és B osztályok olyanok, hogy belül nem mehet él. (Ábra) □

0.2. Általános alsó és felső korlátok

Most megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk általános gráfok színezési számáról.

2. Tétel (Brooks, felső korlát a színezési számra)**.** *Jelölje G maximális fokszámát $d_{max}(G)$. Tegyük fel, hogy G egyszerű, összefüggő gráf. Ekkor*

$$\chi(G) \leq d_{max}(G) + 1,$$

és egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha G páratlan kör, vagy teljes gráf.

A tételnek csak az egyik felét igazoljuk, azt hogy $\chi(G) \leq d_{max}(G) + 1$ teljesül.
Algoritmus.

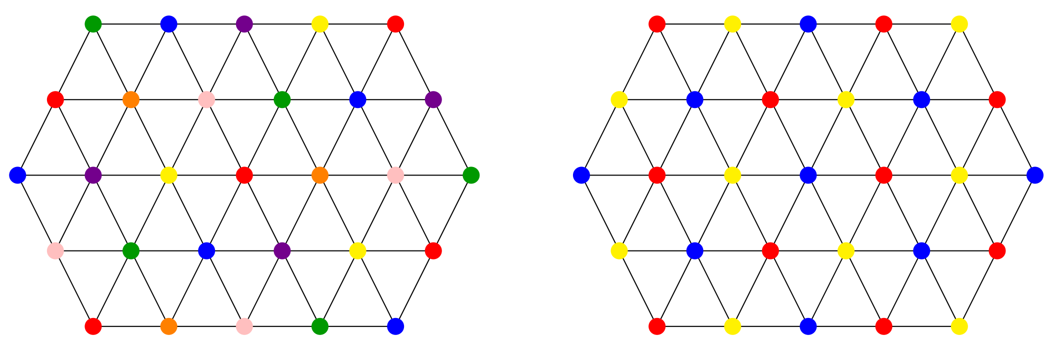
- Rendezzük sorba a csúcsokat: $v_1, \dots, v_n$. Rendezzük sorba a színeket is.
- v_1 színe legyen az első szín.
- ha minden csúcs meg van színezve, aminek indexe kisebb mint k, akkor v_k-t színezzük meg, és legyen a színe a legelső szín, amit nem használtunk v_k szomszédainak eddigi színezése során.

Mivel minden v csúcsnak $d(v) \leq d_{max}(G)$ szomszédja van, ezért ha a színek száma $d_{max}(G) + 1$, akkor biztosan végre tudjuk hajtani mindegyik színezési lépést.

3. Tétel (Alsó korlát a színezési számra)**.** *Ha F a G gráf részgráfja, akkor $\chi(F) \leq \chi(G)$. Speciálisan ha van k méretű teljes K_k részgráf a G gráfban, akkor $k \leq \chi(G)$.*

Bizonyítás. Az állítás magától értetődő: mivel F a G részgráfja, ezért ha G jó színezét vesszük, az F-nek is jó színezése kell hogy legyen. Valóban: a G színezésében már gondoskodtunk róla, hogy F minden éle különböző színű csúcsokat kössön össze.
A speciális esetben annyit kell észrevenni, hogy egy teljes gráfban nem lehetséges, hogy valamelyik csúcspár azonos színt kap. □

Ezek az tételek csak korlátokat adnak meg a gráf színezési számára. Vannak gráfok, ahol a maximális méretű klikk mérete jóval kisebb mint a gráf kromatikus száma, miközben a maximális fokszám a kromatikus számot múlja felül. A színezési (kromatikus) szám meghatározása sokszor igen nehéz feladat.



1. ábra. Egy G gráf jó színezése 7 színnel. Ugyanezen gráf jó színezése 3 színnel. Mivel a gráfban van K_3 háromszög részgráf, 3 színre mindenképpen szükség van.

0.3. Térkép-színezés

Motivációs feladat 2. Bergengócia térképén az udvari térképész felrajzolja a 13 bergengóc tartomány határát, majd berajzolja Bergengócia folyóit is. A hoppmester kijelenti: ez így még nem jó, a szomszédos tartományok nem elég könnyen válnak el egymástól. Színezzük meg a tartományokat úgy, hogy szomszédos tartományok ne kaphassák ugyanazt a színt. Hány színre lesz ehhez szükség?

ÁBRA
A konkrét problémát egyszerűbben kezelhetjük, ha megfeleltetjük a kérdést egy gráfnak. Rendeljünk egy-egy csúcsot a tartományközpontokhoz, és kössünk össze éllel minden tartományközponthoz tartozó csúcspárt, amik szomszédos tartományokhoz tartoztak. A feladatunk az így kapott gráf kromatikus (színezési) számának meghatározása.
Egy így megkapható gráfnak ugyan lehetnek nagy fokú csúcsai, de később fogjuk látni, hogy relatíve ritka gráf (vagyis nem lehet *nagyon sok* éle a csúcsszámához képest). Következő előadáson belátjuk majd, hogy az így kapható gráfok kromatikus száma legfeljebb 6. Mi több, az is igaz, hogy minden térkép tartományai a fenti módon 4 színnel is megszínezhetőek. Erre a síkgráfok fejezetben visszatérünk.

0.4. Élszínezési szám

2. Definíció. *Egy G gráf jó élszínezése k színnel azt jelenti, hogy minden élet kiszíneztünk a k szín valamelyikével, és bármely kétazonos csúcsra illeszkedő él színe különböző.*
A gráf élszínezési száma*, más néven* ***élkromatikus száma*** *az a legkisebb k szám, ahány színnel létezik G-nek csúcsszínezése. $\chi'(G)$-vel jelöljük.*
Egy adott színezés csoportokba osztja az élet a színek szerint, ezeket hívjuk színosztályoknak.

1. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a definíció szerint az egyszínű élek olyanok, amik csúcsdiszjunktak, független éleket határoznak meg.*
A feltétel azonnal adja azt is, hogy a maximális fokszám alsó korlátot ad az élszínezési számra, vagyis $d_{max}(G) \leq \chi'(G)$

Az élszínezési szám értéke egyszerű gráfok esetén sokkal jobban behatárolt, mint a kromatikus szám.

4. Tétel (Vizing tétele)**.** *Ha G egyszer gráf.akkor az élszínezési számára teljesül, hogy*

$$d_{max}(G) \leq \chi'(G) \leq d_{max}(G) + 1.$$

Ezt nem bizonyítjuk, de a következő fejezetben mutatunk a gráfoknak egy nagyobb csoportját, ahol az élkromatikus szám pontosan meghatározható; erről fog szólni Kőnig élszínezési tétele.