Párosítások, algoritmusok

11. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.11.

1. Párosítások

Motivációs feladat 1. Arthur király udvarában száz lovag és száz udvarhölgy állt a király szolgálatában, amikor Arthur házasságra kívánt lépni Ginevrával. Eme jeles alkalom okán elhatározta, hogy a lovagjait és udvarhölgyeit is megházasítja, de – bölcs király lévén – ezt úgy akarta megtenni, hogy a megkötendő házasságok kölcsönös vonzalmon alapuljanak. Megbízta hát tanácsadóját, a nagy Merlint, hogy derítse föl, ki kivel szimpatizál. Merlin kisvártatva vissza is tért a válasszal:
– Nagy király, az alábbi csodás jelenséget tapasztaltam: udvarodban minden lovagnak pontosan tíz udvarhölgy dobbantja meg a szívét, aki viszonozza is érzelmeit, amiképpen minden udvarhölgy is éppen tíz olyan lovaggal lépne szívesen frigyre, aki örömmel adná be a derekát.
– Ez valóban különös jelenség – bólintott Arthur –, de most akkor mi is a helyzet? Tudunk úgy esküvőt szervezni, hogy mindenki elégedett legyen, vagy sem?

Hogy tudjunk válaszolni a kérdésre, rendszerezzük az információinkat. Szemléltessük a helyzetet egy gráffal: az udvarhölgyek és a lovagok lesznek a gráf csúcsai, és pontosan akkor húzunk élt egy lovag és egy udvarhölgy közé, ha azok kölcsönösen szimpatizálnak egymással. Így tehát egy páros gráfot kapunk: az egyik osztályban a lovagokat, a másikban az udvarhölgyeket reprezentáló csúcsok vannak, és élek csak az osztályok között mennek. Merlin kutatásaiból kiderül, hogy minden csúcsból pontosan tíz él indul ki, vagyis a gráf minden csúcsának foka 10 (10-reguláris a gráf). Vajon meg lehet szervezni a nagyszabású lagzit? A gráfban megfogalmazva az a feladatunk, hogy minden csúcsnak találjunk egy párt a vele szomszédos csúcsok közül úgy, hogy végeredményben mindenkinek pontosan egy párja legyen. Egy pár tehát egy él két végpontja, így a párok természetes módon éleknek felelnek meg. Tehát úgy kell éleket kiválasztanunk a gráfban, hogy minden lovagra és minden udvarhölgyre pontosan egy kiválasztott él illeszkedjen.

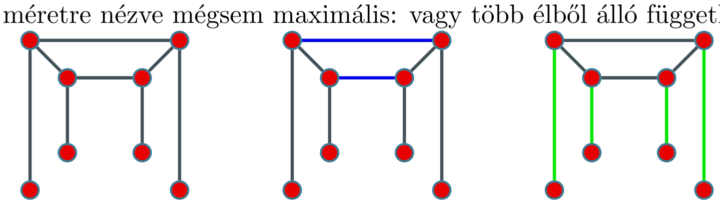
Mielőtt továbbmennénk,bevezetjük a gráfelméleti terminológiát.

1. Definíció (Független élhalmaz, párosítás)**.** *A G gráf éleinek egy részhalmaza* ***párosítás****, vagy* ***független élhalmaz****, ha semelyik két élnek nincsen közös pontja. A párosítás által fedett csúcshalmaz azon csúcsok halmaza, amik az élek végpontjaiból állnak. Egy párosítás* ***teljes párosítás****, ha gráf minden csúcsát lefedi.*

1. Megjegyzés. *A párosítás tehát egy olyan részgráf a gráfban, amelyben minden csúcs foka legfeljebb* 1*, míg a teljes párosítás egy* 1*-reguláris részgráf.*

A párosításra gondolhatunk úgy, hogy a V csúcshalmaz csúcsai között párokat alakít ki. Ha k élű a párosítás, akkor $2k$ csúcsot fed; ha a párosítás teljes, akkor $|V| = 2k$. Egy alapvető kérdés, hogy döntsük el egy adott gráfról, hogy tartalmaz-e teljes párosítást, és amennyiben nem tartalmaz, akkor határozzuk meg a legnagyobb méretű párosítást a gráfban. Általában nem csak a méretre vagyunk kíváncsiak, hanem szeretnénk egy eljárást is, ami megad nekünk eg maximális méretű párosítást.

A kérdés megválaszolásának nehézsége részben abból fakad, hogy egyszerre teljesülhet egy párosításra, hogy:
• nem bővíthető (vagyis további gráfbeli élet nem lehet hozzáadni hogy párosítás maradjon), vagyis bővítésre nézve maximális, de
• méretre nézve mégsem maximális: vagy több élből álló független élhalmaz; lásd az ábrát.



1. ábra. A 8 csúcsú G gráf balra. Középen egy kékkel jelölt párosítás két éllel G-ben, amihez már nem bővíthető (a le nem fogott csúcsok halmaza nem határoz meg élt). Jobbra G egy 4 élből álló, vagyis teljes párosítása zölddel megjelenítve.

1.1. Párosítás páros gráfokban

A motivációs feladatot általánosabb formában fogjuk megoldani: mutatunk egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy páros gráf egyik osztályát (esetünkben: az udvarhölgyeknek megfelelő csúcsok halmazát) lefedő párosítás létezzen. Ez a feltétel tehát maga után vonja a lefedő párosítás létét (elégséges), ám ha nem teljesül, akkor megfelelő párosítás sem létezhet (szükséges).

2. Definíció. *Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy halmaza, akkor $N(X)$* ***jelöli*** *X* ***szomszédhalmazát****: mindazon csúcsokat, amelyek X valamelyik (esetleg több) csúcsával össze vannak kötve. Formálisan: egy $X \subseteq V$ halmaz esetén $N(X) = \{v \in V : \exists u \in X,\ melyre\ uv \in E\}$.*

3. Definíció. *Ha G páros gráf, amely A és B csúcsosztályokra bontható úgy, hogy az E élhalmaz minden élének egyik végpontja A-beli, a másik B-beli, akkor a megszokott $G(V, E)$ jelölés helyett a $G(A \cup B, E)$ jelölést használjuk a gráfra, ahol $V = A \cup B$ a csúcsoknak, E az éleknek a halmaza.*

2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ha G páros gráf az A és B osztályokon és $X \subseteq A$, akkor $N_G(X) \subseteq B$, és hogy ha X egyelemű, akkor visszakapjuk egyetlen csúcs szomszédhalmazát, aminek mérete épp a csúcs fokszáma. Emiatt $|N(X)| \geq \max\{d(v) : v \in X\}$*

Könnyű látni, hogy a motivációs feladatban a teljes kiházasítás tervét megakadályozná az, ha volna néhány (k) udvarhölgy, akik összesen legfeljebb $k - 1$ lovaggal tudnák a házasságot elképzelni, a maradék lovagokat mindannyian kizárnák. Gráfelméleti modellünket használva, gráfos szóhasználattal: egy $G(A \cup B, E)$ páros gráfban a teljes párosítás létezéséhez szükséges, hogy tetszőleges (vagyis akármelyik) $X \in A$ halmaznak legyen legalább $|X|$ szomszédja. A témakör fő eredménye azt mondja ki, hogy ha ez a tulajdonság minden $X \in A$ halmaz esetén fennáll, az nemcsak szükséges, de elegendő feltételt is ad.

1. Tétel (Hall)**.** *A $G = (A \cup B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha* ***minden*** *$X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$.*

Azt a feltételt, hogy minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül, **Hall feltételnek** nevezzük.

Célszerű lehet ennek egyszerű következményét is kimondani - amiből a Hall tétel szintén levezethető (gyakorlat).

2. Tétel (Kőnig-Hall-Frobenius)**.** *A $G = (A \cup B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha*
• *$|A| = |B|$,* ***és***
• *minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$.*

A Hall-tétel bizonyítása.
Szükségesség ($G = (A \cup B, E)$ páros gráfban van A-t fedő párosítás $\Rightarrow$teljesül a Hall-feltétel A osztályra:
Ezt gondoltuk meg a tétel kimondása előtt. Ha ugyanis van egy $E^* \subset E$ élhalmaz A-t fedő párosítás G-ben, akkor tetszőleges $X \subseteq A$ részhalmaz csúcsainak E^* szerinti párjai $N(X)$-ben vannak, így $|N(X)| \geq |X|$.
Elégségesség ($G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban teljesül a Hall-feltétel A osztályra $\Rightarrow$ G-ben van A-t fedő párosítás)
Ezt az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk az $|A|$ osztály mérete szerint. Ha $|A| = 1$, az állítás triviális: $X = A$ választással $|N(X)| \geq |X|$ biztosítja, hogy van A-t fedő él.
Most szeretnénk belátni az összes olan gráfra is, ahol A mérete k - feltétetezve, hogy azokban a gráfokban, ahol az A osztály mérete k-nál kisebb méretű, már igazoltuk.
Indukciós hipotézis: minden $G(A \cup B, E)$ páros gráfban, ahol A csúcsosztály k-nál kisebb méretű van A-t fedő párosítás, amennyiben a Hall-feltétel teljesül A-ra. Két eset állhat fenn:
Első eset: van olyan nemüres $X \subsetneq A$ *valódi* részhalmaz, melyre $|N(X)| = |X|$.
• G gráf X és $N(X)$ által kifeszített páros részgráfjára fennáll a Hall-feltétel, vagyis lesz közöttük X-et fedő párosítás, az indukciós hipotézis szerint (hiszen X mérete kisebb mint $|A|$.

• elég annyit megmutatnunk, hogy a megmaradt $A \setminus X$ és $B \setminus N(x)$ között is van olyan párosítás G élhalmazában, ami lefedi a csúcsokat $A \setminus X$-ben. Ehhez ismét az indukciós hipotézist használjuk. Elég látni, hogy a Hall-feltétel itt teljesül. Ha nem teljesülne, és lenne $Y \subseteq A \setminus X$ halmaz, ami azt megsérti, akkor $|N(Y)|$ számosság legfeljebb $|Y| - 1$, de akkor eredetileg G-ben $X \cup Y$ is sértené a Hall feltételt, lévén $|N(X \cup Y)| \leq |X| + |Y| - 1$. Ez nem lehetséges a feltételünk szerint.
Második eset: nincs olyan nemüres $X \subsetneq A$ valódi részhalmaz, melyre $|N(X)| = |X|$.
Eszerint a feltételünk szigorú egyenlőtlenséggel teljesül: minden nemüres $X \subsetneq A$ valódi részhalmazra $|N(X)| > |X|$. Vegyünk egy tetszőleges uv élt ($u \in A$, $v \in B$), és hagyjuk el a G gráfból, azaz tekintsük az $A' = A \setminus \{u\}$ és a $B' = B \setminus \{v\}$ csúcsok által feszített G' részgráfot. G'-ben ekkor A'-re még mindig fenn áll a Hall feltétel, hiszen minden nemüres $X \subsetneq A$-nak legalább $|X| + 1$ szomszédja volt G-ben, amiből legfeljebb v-t hagytuk ki, tehát G'-ben is marad legalább $|X|$. Az indukciós feltevés szerint G'-ben van teljes párosítás, amihez az uv élt hozzávéve G-nek egy teljes párosítását kapjuk. □

Az elégségesség bizonyításának gondolatmenete tömören a következő volt: 1) ha van a Hall-feltételt egyenlőséggel teljesítő részhalmazunk, az két kisebb, jó gráfra vágja szét a gráfunkat; 2) ha nincs ilyen részhalmaz, tetszőleges élt kidobva a maradék gráf ismét triviálisan jó lesz. A kisebb jó gráfokban pedig indukcióval találunk teljes párosítást.
Kaptunk tehát egy szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy mikor létezik teljes párosítás. Már csak az a kérdés, hogy ezt hatékonyan tudjuk-e ellenőrízni. Erre mutat példát az alábbi tétel, ami igazolja a teljes párosítás létezését reguláris páros gráfokban - amilyenre példát láttunk Artúr király udvarának megfeleltetett gráf esetén.
Mi több, azt is megmutatjuk, hogy reguláris páros gráfok esetén az élkromatikus szám megegyezik a maximális fokszámmal.

3. Tétel (Kőnig tétele)**.**
(1) r-reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás, ha $r \geq 1$.
(2) r-reguláris páros gráf élkromatikus száma r.

Bizonyítás. (1)-nél legyen a $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráf r-reguláris. Feladatunk, hogy ellenőrízzük a Kőnig-Hall-Frobenius tétel feltételeit.
G-ben az élek számát kétféleképpen, A és B felől megszámolva azt kapjuk, hogy $|E| = |A| \cdot r = |B| \cdot r$. Így valóban $|A| = |B|$. Ugyanezt az ötletet használjuk a $N(X)$-re vonatkozó feltétel ellenőrzésekor. Tekintsük azt a G' kétosztályú gráfot, amelynek két osztálya X és $N(X)$, élei pedig G ezen két osztály között menő élei (ez tehát G-nek az $X \cup N(X)$ által feszített részgráfja.) Ebben a részgráfban X minden csúcsának foka r, $N(X)$ minden csúcsának foka legfeljebb r (hiszen $N(X)$ egy csúcsából mehet nem X-beli csúcsba is él.) Így a G' éleinek száma $|X| \cdot r$, ami legfeljebb $|N_G(X)| \cdot r$. Ebből valóban $|X| \leq |N_G(X)|$, vagyis a Kőnig-Hall-Frobenius tételbeli mindkét feltétel teljesül, azaz van teljes párosítás G-ben.
(2) rögtön következik (1)-ből: vegyünk G-ben egy teljes párosítást, színezzük a benne szereplő éleket pirosra, majd hagyjuk el őket G-ből. A maradék gráf $(r-1)$-reguláris, így újra találunk egy teljes párosítást, amit egy másik színnel színezünk, majd elhagyunk. Az eljárást összesen r-szer alkalmazva minden élt megszíneztünk jól. □

Végül azzal foglalkozunk, hogy a maximális méretű párosítás megtalálását hogyan tehetjük meg? Ezt vizsgáljuk meg a következő fejezetben.

1.2. Magyar módszer, maximális párosítás keresése javító utakkal