Síkbarajzolható gráfok

12. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.12.02.

1. Síkgráfok

1.1. Síkgráfok és jellemzésük.

1. Definíció. *Egy G gráfra azt mondjuk, hogy* síkbarajzolható *vagy röviden* síkgráf*, reprezentálható (vagyis lerajzolható) a síkban úgy, hogy a csúcsok a sík pontjai, az élek pedig a pontokat összekötő, nem metsző vonalak (folytonos görbék).*

Ilyen gráfokkal természetes módon találkozunk: a városokat összekötő úthálózat is ilyen gráfnak felel meg (ha nincsenek felüljárók). Történetileg kémiai molekulák áttekinthető ábrázolása volt a síkgráfok vizsgálatának egyik első motivációja; még a 'graph' angol elnevezés is ilyen kontextusból ered (Sylvester). A konvex, sokszöglapokkal határolt testek, vagyis a *poliéderek* élhálói is síkgráfok lesznek, amint azt hamarosan látni fogjuk.

Vegyük észre, hogy attól, hogy egy gráfot valaki lerajzolt metsző élekkel, még lehet síkgráf : előfordulhat hogy le lehet rajzolni metsző élek nélkül is. Ugyanakkor, amint látni fogjuk, vannak gráfok amik nem rajzolhatóak síkba.

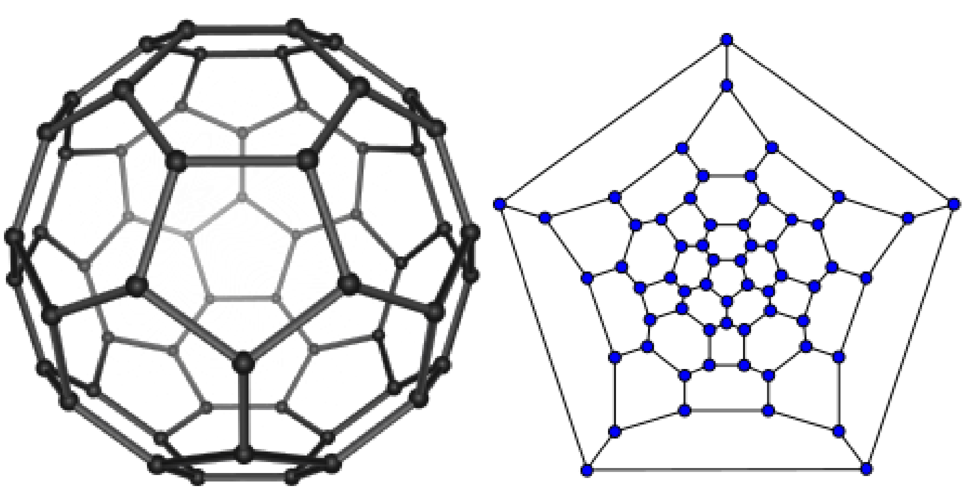
2. Definíció. *Egy G gráf* gömbre rajzolható*, ha a csúcsainak megfeleltethetők a gömbfelület pontjai, az éleknek pedig a pontpárokat összekötő folytonos nem metsző görbék a gömbfelületen.*

1. Állítás. *Legyen G gráf egy konvex poliéder élhálózata. Ekkor G gömbre rajzolható.*

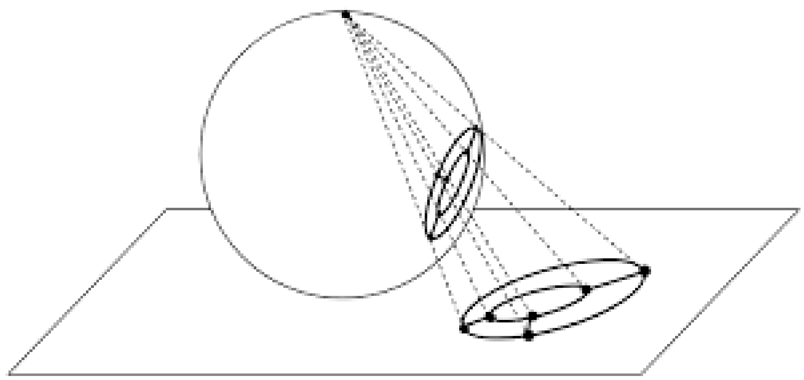
Bizonyítás. Tekintsük a gráfnak megfelelő poliéder belsejében egy gömböt, és legyen O ennek a középpontja. Ha X a poliéder felületén egy pont, feleltessük meg neki az OX szakasz gömbfelülettel vett metszéspontját. Az éleknek megfelelő görbék a gömbfelület megfelelő pontpárokat összekötő (egyértelműen meghatározott) ívei, így folytonosak, továbbá nem metszik egymást, mivel a leképezés a poliéder konvexitása miatt kölcsönösen egyértelmű. □

Most megmutatjuk, hogy a két definíció ugyanazokat a gráfokat határozza meg.

2. Állítás. *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.*



1. ábra. A 60 csúcsú fullerén (”focilabda”) és síkbarajzolása. (Forrás: wikipedia)



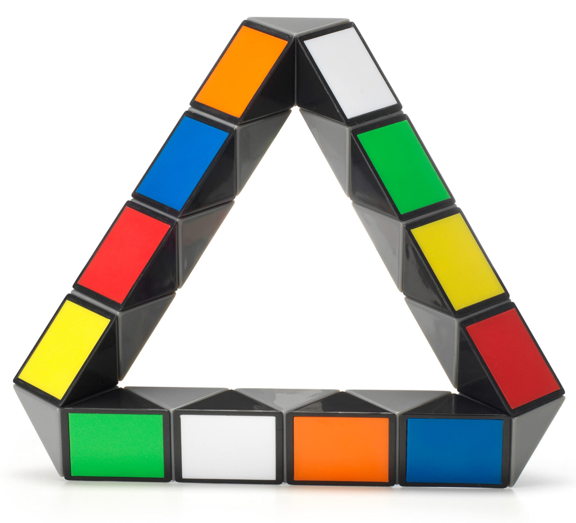
2. ábra. Sztereografikus projekció: a gömbre rajzolt és a síkba rajzolt gráf egymással megfeleltethető

Bizonyítás. Tekintsük a gráf egy síkbarajzolását és tekintsünk egy gömböt, amely érinti ezt a síkot. Az érintési pontot nevezzük a gömb déli pólusának, az ezzel átellenes pontot északi pólusnak (E). A sík egy X pontjának feleltessük meg az XE szakasznak a gömbfelülettel vett (egyértelmű) metszéspontját. Ezzel a megfeleltetéssel (amelyet **sztereografikus projekciónak** nevezünk) a síkbarajzolt gráfnak egy gömbre rajzolását kapjuk. Lényegében egy pontból történő vetítésről beszélünk.

Megfordítva, tekintsük a gráfunknak egy olyan gömbre rajzolását, amelyben E nem pontja a gráfnak, és nem halad rajta át él. Mivel a sztereografikus projekció a sík és a lyukas (északi pólus nélküli) gömbfelület között kölcsönösen egyértelmű, így a fenti leképezés megfordításával a gráf egy síkbarajzolását kapjuk. $\square$

1. Következmény. *Minden konvex poliéder élhálózata síkbarajzolható.*

1. Megjegyzés. *A poliéderről feltettük, hogy konvex. Erre a bizonyításban szükségünk volt, hiszen ezen múlt, hogy a vetítésnél nem lesz közös metszéspontja az éleknek. Azonban megadható olyan poliéder is, ami nem konvex, és az élhálójának megfelelő gráf nem is síkbarajzolható. (3. ábra)*



3. ábra. Rubik-kígyó játék, egy nem konvex poliédernek megfelelő állásban, ahol az éleket úszógumira (tóruszra) rá tudnánk rajzolni - de a gráf gömbre vagy síkbarajzolása nem menne.

A továbbiakban a cél a síkgráfok fontos tulajdonságainak megértése, és annak bemutatása, miként jellemezhető egy síkgráf, vagyis mi alapján dönthetjük el, hogy egy gráf síkbarajzolható-e.

3. Definíció (Tartomány)**.** *Egy síkbarajzolt gráf* tartományának *vagy* lapjának *nevezzük az éleknek megfelelő görbék által meghatározott összefüggő tartományokat, amelyek közé beleértjük a **külső, nem korlátos tartomány**t is.*

Az, hogy egy síkgráf síkbarajzolásánál melyik lap fog megfelelni a küldő tartománynak, a mi szabad döntésünk. Először gömbre vetíthetjük, és elforgathatjuk a gömböt úgy, hogy az északi pólus a kedvenc tartományunkba essen a gömbön, majd onnan vetíthetjük újra a síkba.
A **tartományok száma** azonban a gráfnak egy **állandó**ja lesz, vagyis egy lerajzolásfüggetlen szám. Ezt igazolja a következő tétel.

1. Tétel (**Euler-formula**)**.** *Ha egy összefüggő síkba rajzolt gráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van, akkor teljesül, hogy*

$$n + t = e + 2.$$

Mivel a poliéderek élhálója síkba rajzolható gráfot ad, az előző állítás ezekre is teljesül. A szabályos testek esetét foglalja össze a 1 táblázat. Az is világos, hogy az összefüggőséget miért célszerű feltenni: ha például egy síkba rajzolt gráfot kiegészítünk egy izolált csúccsal, akkor az Euler-formula egyenlőségének két oldala közül csak az egyik növekedne meg.

név	csúcsok száma n	élek száma e	lapok száma t
tetraéder	4	6	4
kocka	8	12	6
oktaéder	6	12	8
dodekaéder	20	30	12
ikozaéder	12	30	20

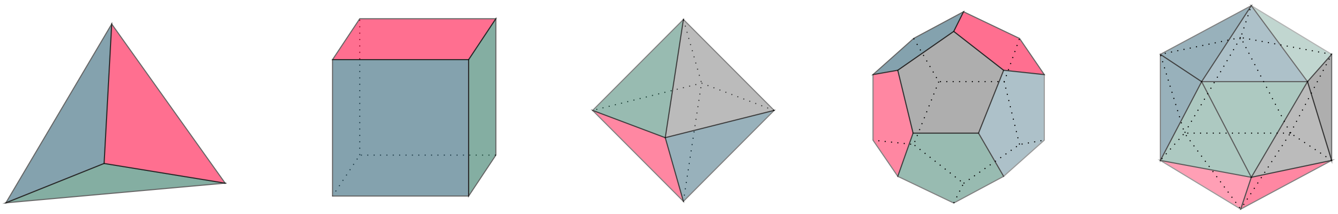
1. táblázat. Az 5 szabályos test csúcsai, élei, lapjai száma.

Az Euler-formula bizonyítása. Rögzítsük a gráf n csúcsszámát, és az állítást az élek száma szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha a gráf élszáma minimális, azaz nem hagyható el belőle él az összefüggőség megtartásával, akkor G egy fa, így $e = n - 1$, továbbá $t = 1$. Ekkor az $n + t = e + 2$ egyenlőség teljesül. Ez tehát a kezdőlépés: ha $e = n - 1$, akkor a tartományok számára valóban teljesül a $t = e + 2 - n$ összefüggés.
Tegyük most fel, hogy G tartalmaz kört, és f legyen ennek egy éle. Azt fogjuk belátni, hogy ha az $e - 1$ élszámú összefüggő síkgráfokra igaz volt az állítás, akkor igaz lesz az e élszámú síkgráfokra is.

Jelölje T_1 és T_2 a körön belül illetve kívül az a két (egyértelműen meghatározott) tartományt, amelyeknek f a közös határa. Töröljük el az f élet és jelöljük G'-vel az új gráfot, aminek e' éle és t' tartománya van!
Egyrészt indukciós feltevés alapján G'-ben teljesül, hogy $n + t' = e' + 2$, hiszen n csúcsú, összefüggő, és eggyel kevesebb éle van, mint G-nek. Másrészt f törlésével T_1 és T_2 egyesül, azaz a kapott G' gráfban $e = e' + 1$ és $t = t' + 1$, a csúcsszám ugyanakkor nem változik. Ez azt jelenti, hogy $n + t = n + t' + 1$, $e + 2 = e' + 1 + 2$, tehát a bizonyítandó állítás az e élszámú esetben is teljesül, ha az $e - 1$ élszámú esetben teljesült. □

2. Megjegyzés. *Csábító lehet egyszerűen azt mondani, hogy kössünk össze két csúcsot, amit össze tudunk kötni metszés nélkül. Vegyük észre, hogy így az élek száma és a tartományok száma is 1-gyel növekedett, vagyis a formula fennáll az új gráfra is. Azt azonban nem mutattuk meg, hogy így **minden** síkba rajzolt gráfot fel tudunk építeni, és mi mindegyikről szóló állítást akarunk igazolni.*
Ezt plasztikusabban szemlélteti a következő fals állítás igazolása: minden gráfban, amelyikben a minimális fokszám legalább 2, van háromszög részgráf. Kézenfekvő volna azt mondnani, hogy $n = 3$ csúcsú esetben az állítás igaz, és innentől ha egy n-csúcsúra igaz, akkor vegyünk egy új csúcsot, kössük hozzá legalább két régi csúcshoz: az így kapott új gráfban is teljesül hogy van benne háromszög. Ezzel azonban nem állítunk elő minden gráfot ahol a minimális fokszáém legalább 2: már $n = 4$-re lépve a C_4 kör sem áll elő úgy, hogy egy C_3-hoz kötünk hozzá új csúcsot - és persze nincs is benne 3 hosszú kör.

3. Megjegyzés. *Most már azt is megérthetjük, hogy a 3. ábrán látható farkába harapó Rubik kígyó miért nem élváza síkbarajzolható. Amíg teljesen kinyújtott állapotban van, addig teljesülne rá az Euler formula, azonban amikor a két végén található négyzetlapot összeragasztjuk, azonosítunk $4 - 4$ csúcsot illetve élet, és elveszítünk két lapot is. Ezt követően az Euler-formula már nem áll fenn az éleire, csúcsaira és lapjaira.*



Tetraéder Kocka (Hexaéder) Oktaéder Dodekaéder Ikozaéder

4. ábra. Az öt szabályos (platóni) test.

Az Euler-formula segítségével könnyű megmutatni, hogy a síkgráfok ritka gráfok, vagyis relatíve kevés élük lehet csak. Másképpen fogalmazva: ahhoz, hogy egy gráf síkgráf legyen, szükséges (de nem elégséges!) feltétel, hogy meglehetősen kevés éle legyen:

2. Tétel. *Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf legalább $n \geq 3$ csúcson, akkor*

$$e \leq 3n - 6$$

teljesül az élszámára.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy a síkgráf összefüggő, ellenkező esetben komponensenként igazolva az összefüggést, az állítás az egyenlőtlenségek összegzéséből adódik.
Tekintsük a síkgráf egyik síkbarajzolását, és számoljuk meg, hogy az egyes tartományokat mennyi él határolja, multiplicitással számolva. [1] Jelölje $m_1, m_2, \ldots, m_t$ ezeket a számokat. Ha a gráf egyszerű, vagyis nincsenek párhuzamos élek, továbbá a csúcsok száma legalább 3, akkor minden tartományt legalább 3 él határol. Másrészt minden él pontosan kétszer lesz összeszámolva, ha tekintjük az $m_1 + m_2 + \ldots + m_t$ összeget, vagyis

$$3t \leq m_1 + m_2 + \ldots + m_t = 2e.$$

Ha itt beírjuk az Euler-formulából adódó $t = e + 2 - n$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$3(e + 2 - n) \leq 2e,$$

ami átrendezve azonnal a bizonyítandó $n \leq 3n - 6$-ra vezet. □

4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden tartomány (tehát a külső, nem korlátos tartomány is!) háromszöglap. Ez ráadásul minden n esetén el is érhető: ha találunk egy tartományt, aminek több mint 3 határolóéle van, akkor nem-szomszédos csúcsokat a tartományon belül össze tudunk kötni anélkül hogy metszést hoznánk létre, így növelve az élek (és tartományok) számát.*

3. Állítás. *Ha a G összefüggő síkgráfban nincsen háromszög, és csúcsszáma legalább 3, akkor $e \leq 2n - 4$ is teljesül az élszámára.*

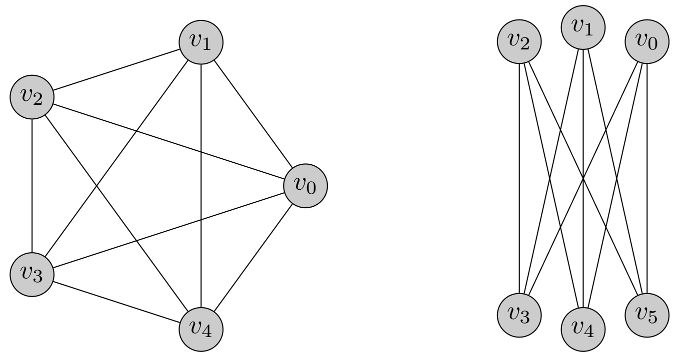
Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tétel bizonyítását azzal az észrevétellel kiegészítve, hogy $4t$ is alsó korlátja lesz a $m_1 + m_2 + \ldots + m_t$ összegnek, hiszen minden tartományt legalább 4 él határol (multiplicitásokkal számolva). □

Ezek az állítások már közvetlenül alkalmasak konkrét, kis csúcsszámú gráfokról megmutatni, hogy nem lehetnek síkgráfok.

4. Állítás. *A K_5 teljes gráf és a $K_{3,3}$ teljes páros gráf nem síkgráfok.*

Bizonyítás. K_5 csúcsainak száma 5, éleinek száma $\binom{5}{2} = 10$, amely nagyobb, mint $3 \cdot 5 - 6 = 9$, így nem teljesül rá az Euler-formula következményeként egyszerű síkgráfokra kapott $e \leq 3n - 6$ egyenlőtlenség, a 2. Tétel állítása. Hasonlóan, $K_{3,3}$ csúcsainak száma 6, éleinek száma 9, amely pedig nagyobb, mint $2 \cdot 6 - 4 = 8$. Síkgráfokban nincsenek páratlan körök, vagyis a legrövidebb kör hossza 4. Emiatt 3. állítás egyenlőtlensége, miszerint páros síkgráfokban $e \leq 2n - 4$ teljesül, igazolja hogy $K_{3,3}$ nem síkgráf. □

[1]Poliéderek élhálója esetén természetesen minden határolóélt egyszer fogunk számolni, de pl. fák esetében egyetlen tartomány van, és annak határán végighaladva minden élet kétszer számolunk; és általában is ha van olyan él, aminek elhagyása két komponensre bontja a gráfot (elvágó él), akkor ez az él a külső tartomány határán kétszer is megszámolódik.



5. ábra. A Kuratowski-gráfok: K_5 és $K_{3,3}$. Ezek nem síkbarajzolhatóak.

Azzal, hogy találtunk két nem síkbarajzolható gráfot, valójában ilyen gráfoknak elég bő családját megtaláltuk, hiszen minden olyan gráf, amiben részgráfként ott van akár K_5, akár $K_{3,3}$, nem lesz síkba rajzolható. De még ennél is többet mondhatunk. Ha valamelyik gráfban az egyik élet egy új csúcs, az él ”felezőpontja” felvételével felosztunk két élre, az a gráf síkbarajzolhatóságát nem befolyásolja: az új gráf pontosan akkor rajzolható le, ha az eredeti is. Ilyen felosztások segítségével viszont - meglepő módon - már pontosan le lehet írni azokat a gráfokat, amik síkbarajzolhatóak.

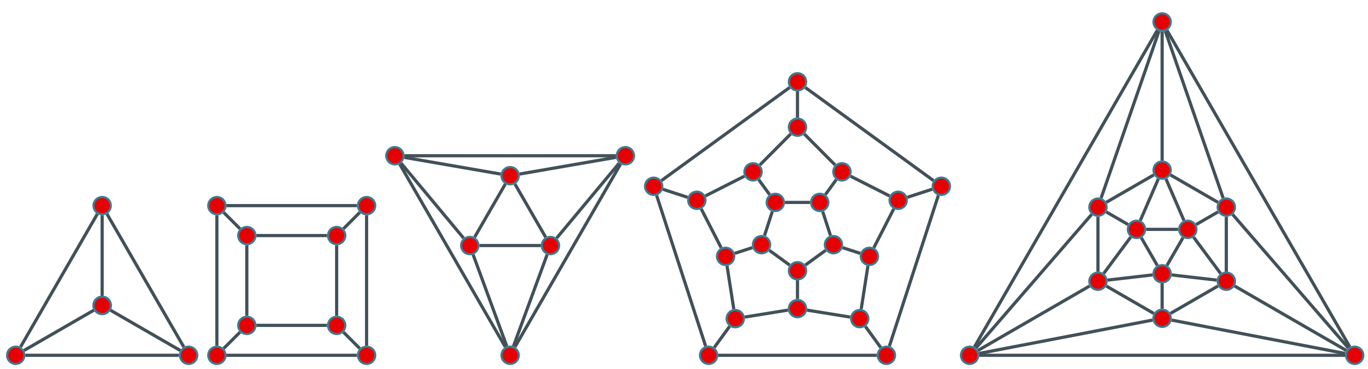
4. Definíció. *A H gráf a G gráf felosztása (soros bővítése), ha megkapható a G gráfból úgy, hogy G néhány élét felosztjuk közbenső csúcsokkal.*

3. Tétel (Kuratowski-tétel)**.** *Egy gráf akkor és csak akkor rajzolható síkba, ha nem tartalmazza részgráfként sem a K_5 teljes gráfot, sem a $K_{3,3}$ teljes páros gráfot, sem pedig ezek egyikének felosztottját (soros bővítését).*

(A tételt nem bizonyítjuk.)

Végül kimondunk még egy szép tételt ami arról szól, hogy minden síkgráfot nagyon szépen is le tudunk rajzolni a síkba:

4. Tétel (Fáry-Wágner tétel)**.** *Ha G egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is létezik, amelyben minden élet egyenes szakasz reprezentál.*



6. ábra. Az öt szabályos (platóni) test élhálójának síkbarajzolása, egyenes vonalakkal.

Az alfejezet zárásaként belátjuk, hogy valóban csak azok a szabályos testek létezhetnek, amiket fentebb már megismertünk. Ezeket platóni testnek is nevezik, nem véletlenül: az ókori görögök is ismerték őket. Gráfelméleti szempontból elég annyit feltennünk, hogy attól szabályos egy poliéder, hogy minden csúcsának ugyanannyi a foka, d, és minden sokszöglapjának ugyanannyi az oldalszáma, k.

5. Tétel. *Pontosan 5 szabályos test létezik.*

Bizonyítás. Írjuk fel a szabályos testnek megfelelő síkgráfban a fokszámösszeget! A fokszámtételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$dn = 2e.$$

Most írjuk fel a 2. tétel bizonyításához hasonlóan a tartományok oldalszámainak összegét! Azt kapjuk, hogy

$$kt = 2e.$$

Ezeket behelyettesítve az Euler-formulába, azt nyerjük, hogy

$$\frac{2e}{d} + \frac{2e}{k} = e + 2,$$

vagyis leosztva $2e$-vel.

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

Az egészek között keressük a megoldásokat, és az is világos, hogy $d \geq 3$, valamint $k \geq 3$. Két észrevételre van szükségünk:

- Ha d és k is legalább 4, akkor a baloldal legfeljebb 1/2, a jobboldal ennél nagyobb.
- Ha d és k egyike legalább 6, akkor a baloldal legfeljebb 1/2, a jobboldal ennél nagyobb.

Innen adódik, hogy a (d, k) számpárok lehetséges értékei: $(d, k) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$. Ezek mind lehetségesek is, és sorban kiadják a tetraéder, kocka, dodekaéder, oktaéder, ikozaéder eseteket. □

1.2. Síkgráfok és térképek színezése

1852-ben lett figyelmes Francis Guthrie későbbi matematika professzor arra, hogy Anglia megyéit ki tudja színezni négy színnel úgy, hogy az azonos színű megyéknek ne legyen közös határvonala. Mivel a későbbiekben sem talált olyan térképet, amelynek színezéséhez ne lett volna elég a négy szín, sejtésével testvéréhez fordult, aki ekkor londoni University College-ben volt Augustus De Morgan tanítványa. (v.ö. de Morgan azonosságok). A 4-szín sejtés bizonyítására, amely először 1954-ben látott napvilágot a The Atheneum folyóiratban, kezdetben számos hibás bizonyítás született. 1890-ben mutatta meg Alfred Kempe 1879-es hibás bizonyítását felhasználva Percy Heawood, hogy minden térkép színezhető 5 színnel. A sejtést végül Kenneth Appel és Wolfgang Haken igazolta számítógépes módszereket is felhasználva 1977-ben. Ennek a tételnek a bizonyítása túlmegy a jegyzet keretein, a fejezetben azt fogjuk megmutatni, hogy minden térkép jól színezhető hat színnel. A 4 színnel színezhetőség bizonyítása abból a szempontból is nagyon meghatározó volt, hogy teljes levezetés helyett bizonyos esetek vizsgálatát egy program végezte, és az ellenőrízhetőséget is néhányan kétségesnek látták.

Egy térképnek megfeleltethetünk egy gráfot oly módon, hogy minden országhoz egy csúcsot rendelünk, és két csúcsot akkor kötünk össze, ha a nekik megfelelő országoknak van közös határszakasza. Az így kapott gráf csúcsainak egy jó színezése megfelel a térkép jó színezésének, így a térképszínezés tekinthető csúcsszínezési feladatként. A térkép kis módosításával az egyes országok közös határszakaszai tekinthetők egy síkgráf éleinek, három, vagy több ország közös határpontja pedig a gráf csúcsainak, így a fenti megfeleltetéssel egy síkbarajzolt gráfhoz rendelhetünk egy másik, szintén síkbarajzolható gráfot. A pontos definíció az alábbi.

5. Definíció (Síkba rajzolt gráf duálisa)**.** *Legyen G egy síkbarajzolt gráf és rendeljünk hozzá egy G^* gráfot a következőképpen. Vegyünk fel egy-egy pontot G tartományainak belsejében, ezek fognak megfelelni G^* csúcsainak. Ezután két szomszédos tartománynak megfelelő csúcsot kössünk össze görbékkel úgy, hogy G-ben minden görbe egy közös határszakaszt metsz, ezek lesznek G^* élei. Ezzel G és G^* élei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk meg. Továbbá az eredeti gráf egy tetszőleges csúcsából kiinduló éleknek megfelelő élek a G^* gráfban egy kört alkotnak, amely a csúcsot elválasztja a többitől, így egy olyan tartományt határoznak meg, amelynek a belsejében csak ez a pont található, így az új gráf tartományai és az eredeti gráf csúcsai között is kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn.* ***Az így kapott G^* gráf a G síkbarajzolt gráf duálisa****. Ebben a csúcsok halmazát V^*-gal, az élek halmazát E^*-gal fogjuk jelölni. (ÁBRA!)*

5. Megjegyzés. *Fontos itt megjegyezni, hogy a fenti megfeleltetés nem a G gráfhoz, hanem* ***annak egy konkrét lerajzolásához*** *rendeli a duálist, így ugyanannak a gráfnak a különböző lerajzolásaihoz különböző duálisok is tartozhatnak. Továbbá az sem minden esetben igaz, hogy a G^* duálisa az eredeti gráf. Ennek a tulajdonságnak a részletesebb tárgyalásával a fejezet végén foglalkozunk.*

7. ábra. Nagy-Britannia tartományainak 4-színezése

A definíció felhasználásával tehát a G síkbarajzolt gráf tartományainak színezése megfelel a G^* duális gráf pontjai színezésének, így a térképek színezésére vonatkozó tétel ekvivalens az alábbival.

6. Tétel (4-szín tétel)**.** *Minden hurokélmentes G síkgráf csúcsai jól színezhetők 4 színnel, vagyis ilyen gráfokra $\chi(G) \leq 4$.*

Az tiszta sor, hogy 4 színre szükség lehet, hiszen K_4 előfordulhat egy síkgráfban, amint azt a tetraéder élhálójánál is láttuk.
A tételnek azt a gyengébb változatát, hogy a síkgráfok színezéséhez 6 szín elég, két lépésben bizonyítjuk.

7. Tétel (6-szín tétel)**.** *Minden hurokélmentes G síkgráf csúcsai jól színezhetők 6 színnel.*

Bizonyítás. A csúcsok számára vonatkozó indukciót alkalmazunk. Ha a gráfnak csak egy pontja van, az állítás nyilvánvaló. Mivel egy gráf k színnel való jól színezhetősége nem függ a többszörös élektől, így feltehető, hogy G egyszerű.
Az Euler-formula következményeként kapott egyenlőtlenségből következik, hogy egy egyszerű síkgráfnak van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa. Valóban, ha minden csúcs foka legalább 6 lenne, akkor az élek számára teljesülne az

$$e = \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{2} \geq \frac{6n}{2} = 3n$$

egyenlőtlenség, ami több, mint amennyi a 2. Tétel szerinti $3n - 6$-os maximum.
Legyen most v egy olyan csúcs, amelyre $d(v) \leq 5$. Ekkor a v törlésével kapott G' síkgráf csúcsai az indukciós feltevés miatt színezhetők hat színnel. Mivel v foka legfeljebb 5, így van olyan szín, amelyet v egyik csúcsához sem rendeltünk hozzá. Ezzel a színnel nyugodtan kiszínezhetjük v-t és így egy jó színezését kapjuk a G gráfnak. $\square$