Pascal-háromszög, kétszeres leszámolások, Binomiális tétel

3. előadás, Nagy Zoltán Lóránt,

2022.09.30.

1.

1.1. Binomiális együtthatók

Ismétlés Adott egy n elemű S halmaz. Ha $k \leq n$ elemet akarunk belőle kiválasztani úgy, hogy a kiválasztásnál sorrend nem számít, akkor a választási lehetőségek számát $\binom{n}{k}$-val jelöljük.
Láttuk, hogy ez így számolható ki:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Megjegyzés. •

- *$k = 0$-ra is van értelme a kiválasztásnak: ilyenkor egyféle lehetőségünk van, t.i. hogy semmit nem választunk. Ekkor a számlálóban és a nevezőben "üres szorzat" van, amit hagyományosan 1-nek definiálunk. Ugyanígy $0! := 1$.*
- *Algebrailag azt is látjuk, hogy a jobb oldali képletet nyerjük akkor is ha $\binom{n}{n-k}$-t írjuk fel $\binom{n}{k}$ helyett. Másképp mondva:*

  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

  Van ennek kombinatorikus magyarázata is? Ez egyfajta kiinduló kérdése lesz a fejezetünknek.
- *A leszámolási képlet, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ arra utalhat, hogy az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sorbarendezési feladatra is választ ad: n darab tárgy sorrendjei száma, amelyek közül k darab azonos, és a fennmaradó $n-k$ szintén egyforma. (Ismétléses permutáció.)*

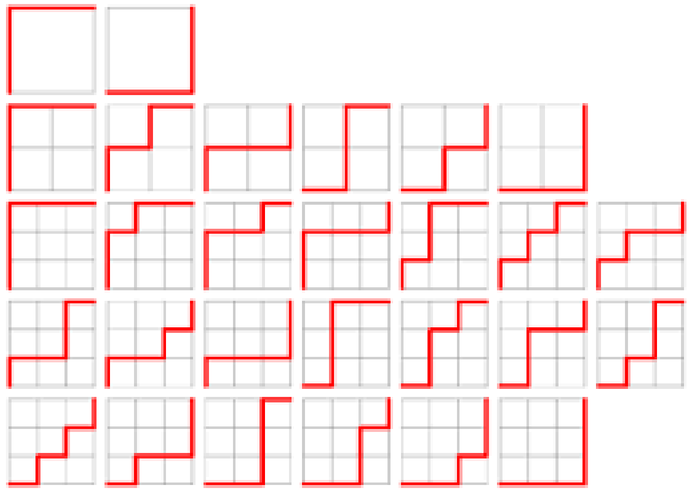
1.2. Pascal háromszög és kétszeres leszámolások

Motivációs feladat 1. Hányféle úton sétálhatunk el a négyzethálós füzetünkben a $(0,0)$ origóból a $(3,3)$ pontba, ha minden lépésünkben vagy felfelé, vagy jobbra lépünk egy egységnyit?
Mely rácspontokba érhetünk így ha összesen 6 lépést teszünk, és összesen hány ilyen 6-lépéses utat tehetünk?

Bizonyítás. Az előző fejezetben tárgyalt **bijekciós módszert** alkalmazva: minden lépéssorozathoz rendeljünk 6 hosszú $0-1$ sorozatot úgy, hogy ha felfelé lépünk, írjunk 1-est, ha jobbra lépünk, írjunk 0-t.
Ekkor a $(0,0)$ origóból a $(3,3)$ pontba vezető utaknak olyan sorozatok feleltek meg, ahol pontosan 3 darab 1-es és ugyanennyi 0 szerepel. Az ilyenek száma megegyezik azzal, ahányféleképp a 6 lépésből kiválaszthatjuk a 3 felfelé menőt: $\binom{6}{3}$.
Az összes lépéssorozat az $x + y = 6$ egyenletű egyenesen ér véget, mégpedig egy olyan (x, y) rácsponton, ahol $x, y \geq 0$ és egész. Az előzőhöz hasonlóan meg is tudjuk mondani, hogy egy ilyen (x, y) pontba éppen $\binom{x+y}{x}$ féleképpen érkezhetünk. Vagyis az összes 6-lépéses út száma

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i}.$$

Node a válaszhoz gyorsabban is eljutunk: minden lépés 2-féle lehet, és bárhogyan lépdeltünk eddig, továbbra is megmarad a kétféle lehetőség, vagyis a válasz 2^6.
Eszerint $2^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i}$. □



1. ábra. a $(0,0) \to (1,1)$ utak (1. sor), a $(0,0) \to (2,2)$ utak (2. sor, és a $(0,0) \to (3,3)$ utak (3-5. sor).

(6,0): 1						
(5,0): 1	(5,1): 6					
(4,0): 1	(4,1): 5	(4,2): 15				
(3,0): 1	(3,1): 4	(3,2): 10	(3,3): 20			
(2,0): 1	(2,1): 3	(2,2): 6	(2,3): 10	(2,4): 15		
(1,0): 1	(1,1): 2	(1,2): 3	(1,3): 4	(1,4): 5	(1,5): 6	
(0,0): 1	(0,1): 1	(0,2): 1	(0,3): 1	(0,4): 1	(0,5): 1	(0,6): 1

Táblázat 1: Felfelé-jobbra utak száma az origóból az egyes rácspontokba.

Érdekes szabályszerűség tűnik fel, ha sorra kiszámoljuk az egyes rácspontokba vezető felfelé-jobbra utak számát:

0. minden rácspontba egy-egy binomiális együttható fejezi ki ezt a számot. Amint láttuk, (x, y)-ba $\binom{x+y}{x}$ utat találunk az origóból.
1. az utak számának táblázata az $x = y$ tengelyre szimmetrikus
2. egy rácspontba vezető utak száma megegyezik a tőle balra, illetve a tőle lefelé lévő lévő rácspontba vezető utak számának összegével.
3. átlósan 2-hatványt kapunk mindig az utak számának összegére, nem csak $n = 6$ esetén.

Ezeket az észrevételeket általánosan is igazoljuk, de előtte egy klasszikus elrendezésbe rendezzük a binomiális együtthatókat

$n=0$	1	$\binom{0}{0}$
$n=1$	1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
$n=2$	1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
$n=3$	1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
$n=4$	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
$n=5$	1 5 10 10 5 1	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Táblázat 2: A **Pascal-háromszög** *klasszikus elrendezése a 0. sortól az 5. sorig ábrázolva: balra binomiális együtthatókat felírva, jobbra azok számértékét.*

1. Tétel (Azonosságok a Pascal-háromszögben)**.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n. \tag{3}$$

A tétel különálló állításait most többféle úton is belátjuk.

(1) algebrai bizonyítása. Közvetlenül következik abból, hogy miként számoljuk ki a binomiális együtthatót (lásd az ismétlést a fejezet elején): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ □

(1) kombinatorikus bizonyítása: ugyanazt kétféleképpen leszámoljuk.
Ha n elemből akarunk k-t kiválasztani, akkor erre gondolhatunk úgy is, hogy azokat jelöljük meg, amiket *nem választunk ki.* Így mindig $(n-k)$ elemet jelölünk meg; és minden megjelölt $(n-k)$ elemű halmaz egyetlen k-elemű választásához tartozik hozzá (komplementálás révén). Bijekciós módszer szerint tehát az n elemű halmazban a k-elemű és az $n-k$ elemű részhalmazok ugyanannyian vannak. □

(1) kombinatorikus bizonyítása: bijekcióval a motivációs feladat segítségével.
A $(k, n-k)$ pontban nyilván ugyanannyi út vezet, mint az $(n-k, k)$ pontba, hiszen minden $(k, n-k)$ pontba vezető jobbra-felfelé útból egy $(n-k, k)$ pontba vezető utat kapunk, ha minden lépésben a jobbra és felfelé lépéseket kicseréljük egymásra. Így amennyit felfelé léptünk, annyit lépünk végül jobbra; és ugyanígy megfordítva. □

(2) algebrai bizonyítása.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = (n-1)! \cdot \frac{k+(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

(2) kombinatorikus igazolása: kétszeres leszámolás.
Van egy n elemű halmazunk, az egyik elem piros. Hányféleképp választhatunk ki k elemet?
Egyrészt: a piros szín ismerete nem változtat a kérdésen, vagyis a válasz $\binom{n}{k}$.
Másrészt: *Esetszétválasztás.*
- vagy kiválasztjuk a pirosat és a maradékból $k-1$-et, összesen $\binom{n-1}{k-1}$-féleképp,
- vagy nem választjuk ki a pirosat és a maradékból k-t veszünk, összesen $\binom{n-1}{k}$-féleképpen. □

(2) kombinatorikus bizonyítása a motivációs feladat segítségével. Ahhoz, hogy $(k, n-k)$-ba érkezzünk, az utolsó lépés vagy felfelé volt, vagy jobbra lépés. Előbbi esetben a $(k, n-k-1)$-ből jöttünk, utóbbi esetben a $(k-1, n-k)$-ból. Ezen pontokba vezető utak száma rendre $\binom{n-1}{k}$ és $\binom{n-1}{k-1}$, és ezek egyféleképp fejezhetőek be, hogy $(k, n-k)$-ba érkezzünk. □

(3) algebrai bizonyítása. Ez az alábbi binomiális tételből következik, $a = b = 1$ helyettesítéssel. □

(3) kombinatorikus bizonyítása, kétszeres leszámolással.
Azokat az utakat számoljuk, amik összesen n lépést tesznek (minden lépés vagy jobbra, vagy felfelé).
Egyrészt: az ilyen utak száma a szorzási szabály alapján 2^n, hiszen n független döntésünk van, minden alkalommal két döntési lehetőséggel. (Jobboldal)
Másrészt: összegezhetjük az utak számát aszerint, hogy mennyi a felfelé lépés az útban az n lépés közül. Ha a felfelé lépések száma i, akkor a megfelelő utak száma értelemszerűen $\binom{n}{i}$. Az i értéke bármilyen egész lehet 0-tól kezdve egészen n-ig. (Baloldal) □

2. Megjegyzés. *Általánosságban is segít valamely azonosság a kombinatorikus, kétszeres leszámolást alkalmazó bizonyításban, hogy találjunk egy kombinatorikus leszámlálási jelentést annak az oldalnak, amelyiket könnyebben találjuk; majd próbáljuk meg felfedezni, miért számolja ugyanazt a másik oldalon szereplő képlet.*

1.3. Binomiális tétel

Az $\binom{n}{k}$ alakú számokat binomiális együtthatóknak hívtuk. Ennek oka egy általános algebrai azonosságban rejlik, amely kéttagú kifejezések (görögül: binom) hatványozásaiból származik.
Írjuk fel az $(a+b)$ összeg n kitevős hatványának rendezett összeg alakját kis n értékekre, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
Vessük össze a tagok együtthatóit a Pascal-háromszög elemeivel.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a+1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2+2ab+1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3\\
(a+b)^4 &= 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4\\
(a+b)^5 &= 1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Azt látjuk, hogy minden sorban az együtthatók megegyeznek a Pascal-háromszög megfelelő sorában álló számokkal, az ottani binomiális együtthatókkal. Belátjuk, hogy ez általánosságban is érvényes.

2. Tétel (Binomiális tétel)**.** *Legyen n nemnegatív egész szám. Az $(a+b)^n$ hatvány rendezett összegalakjában az $a^k b^{n-k}$ kifejezés együtthatója $\binom{n}{k}$, és így a teljes rendezett alak felírható úgy, mint*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Bizonyítás. Vegyük észre először, hogy csak olyan kifejezések jönnek létre a rendezett alakban, ahol a és b kitevőjének összege n. Ez azért van, mert az $(a+b)^n$ n-tényezős szorzatban minden tényezőből vagy a-t vagy b-t kell választani, hogy kapjunk egy tagot az összegben.
Hányszor kapjuk meg $a^k b^{n-k}$-t? Annyiszor, ahányféleképpen kiválaszthatjuk a kifejtésnél az n tényező közül azt a k tényezőt, ahol a szorzatba a-t választunk és nem b-t. Ez a tanultak szerint éppen $\binom{n}{k}$ lehetőség. A hatvány teljes kifejtését úgy kapjuk, hogy minden olyan k-ra össze kell ezt adni megfelelő együtthatóval a $a^k b^{n-k}$ kifejezést, ahol k nemnegatív egész, és legfeljebb n. $\square$

2. bizonyítás, teljes indukcióval, felhasználva a már megismert azonosságokat 1 Tételből .
Teljes indukciót használunk.
$n=0$-ra az állítás igaz.
Tételezzük fel, hogy $n=m$-ra már igazoltuk az állítást, és bizonyítsuk $m+1$-re! Lényegében tehát azt kell megmutatnunk, hogy az $(a+b)^{m+1}$ összegalakjában $a^k b^{m+1-k}$ kifejezés együtthatója $\binom{m+1}{k}$.

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m(a+b).$$

Tudjuk, hogy

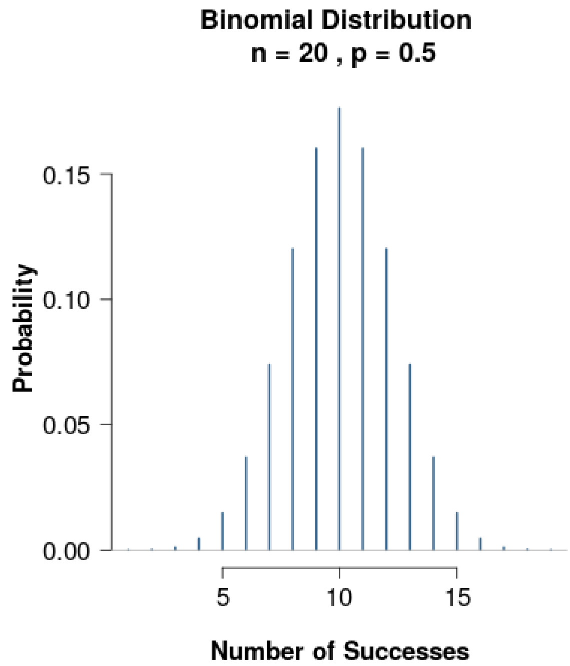
$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k.$$

Eszerint

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k.$$

Annyit kell észrevenni, hogy a jobboldalon két összeg szorzata szerepel. Ha kifejtjük összegalakban, akkor minden tagban a és b kitevőjének összege $m+1$, ráadásul a $a^k b^{m+1-k}$ tagot két helyről nyerhetünk: a és $a^{k-1}b^{m-k+1}$ szorzataként (ha $k \geq 1$ teljesül), ill. b és $a^k b^{m-k}$ szorzataként (ha $m-k \geq 0$ teljesül). Így $a^k b^{m-k+1}$ együtthatójára ezt kapjuk: $\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}$.
1. Tétel (2) pontját $n=m+1$-re alkalmazva $\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$, amit igazolni akartunk $\square$

Kitekintés A Pascal háromszög sorait értelmezhetjük a következő modell segítségével is. Dobjunk fel egy szabályos pénzérmét (ami ugyanakkora eséllyel esik fejre és írásra) n-szer! (Gondolhatunk egy konkrét n értékre, pl. $n=20$.) Számoljuk meg, mennyi dobássororzat van, ahol egy előre rögzített k darab fej van a dobások között! Nyilván $\binom{n}{k}$ ilyen



2. ábra. A binomiális eloszlás oszlopdiagramos ábrája.

dobássorozat lesz. Ábrázoljuk oszlopdiagrammal a kimeneteleket az összes lehetséges k értékre, vagyis $0 \leq k \leq n$-re! (Ábra 2). Az oszlopok jellegzetes haranggörbét követnek, minden n esetén. Ha adott k-ra a valószínűséget vizsgáljuk, tehát a

$$\frac{\text{dobássorozatok, ahol pontosan } k \text{ dobás fej}}{\text{összes dobássorozat}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

mennyiséget, akkor ahogy n egyre nagyobb, úgy lesznek az egyedi valószínűségek egyre kisebbek, ezt az ú.n. Stirling-formulából lehet levezetni (analízis), ami az $n!$ értékét becsüli meg, és faktoriálisok hányadosaként megkapjuk a binomiális együtthatókat.

Statisztikában innen ered majd binomiális eloszlás, amikor a

$$P(\#\text{fej} = k) = \frac{\text{dobássorozatok, ahol pontosan } k \text{ dobás fej}}{\text{összes dobássorozat}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

értékeket sorban nézve éppen a k fejet tartalmazó dobássorozatok valószínűségét kapjuk; és a valószínűségek összege persze így $1 = 100\%$ lesz.

3. Megjegyzés. *Ezen a pontos nagyon fontos az iskolában a szemléletes tanítás, hogy szépen szétváljon a diákok fejében az, hogy a kimenetelek (hány fejet dobtunk) nem feltétlenül egyforma valószínűségű események: egyszerűbb esetek összegzéséből adódnak, t.i. a különféle dobási sorozatokból, amik már tényleg egyforma valószínűségűek. Lásd még: két szabályos dobókockával* 2*-től* 12*-ig sokféle dobott érték lehetséges, de nem mind egyforma valószínűségű. A valószínűségek még csak nem is a adott összeg rendezetlen felbontásai számától függ. Pl. akár* 2*-t akár* 3*-at dob valaki, meg tudjuk mondani, milyen számok állnak a kockán egyértelműen:* 2 *esetén* 1 *és* 1*,* 3 *esetén* 1 *és* 2*. De a* 3*-as dobás kétszer olyan gyakori; még akkor is, ha a kockák egyformának tűnnek.*

3. Tétel (További következmények)**.** *A binomiális együtthatók alábbi előjeles összege zérus:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \pm\binom{n}{n-1} + \mp\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = 0 \tag{4}$$

A Pascal-háromszög jobboldalával párhuzamos átlójában az elemek összege is binomiális együttható:

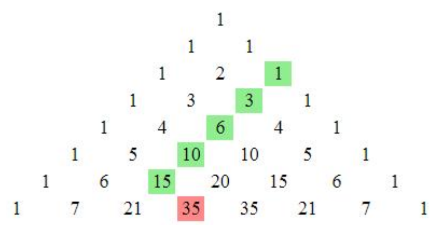
$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \tag{5}$$

A Pascal-háromszög jobboldalával párhuzamos átlójában az elemek összege is binomiális együttható:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m} \tag{6}$$

(4) igazolása.
Helyettesítsünk $a = -1, b = 1$-et a binomiális tételbe.
Más bizonyítás: Használjuk fel, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, helyettesítsük be minden k értékre, és vegyük észre hogy minden tag kiesik. □

(5) igazolása, vázlat.
Rögzítsünk egy n számot. Bizonyítsunk ezután teljes indukcióval m szerint. Ha tudjuk az állítást valamely m-re, akkor a $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+m}{n}$ összegből egy binomiális együtthatót nyerünk. Ahhoz, hogy $m+1$-re felírjuk a formula baoldalát, az előző összeghez egyetlen binomiális együtthatót kell hozzáadni, $\binom{n+m+1}{n}$-t, ami Pascal-háromszögben az előző összegként kapott binomiális együtthatónak, $\binom{n+m+1}{n+1}$-ank a szomszédja. Használjuk a (2) azonosságot.



3. ábra. Példa a (5) binomiális összegzésre. Itt $n = 2, m = 4$.

□

(5) igazolása kétszeres leszámolással.
Válasszunk az $\{1, 2, \ldots n+m+1\}$ halmazból $n+1$ elemet.
Egyrészt: A jobboldal megmondja, ez hányféle módon lehetéges.
Másrészt: Válasszuk ki először a legnagyobb elemet $(n+k+1)$, majd a nála kisebb elemek közül válasszunk n-et. Erre $\binom{n+k}{n}$ lehetőségünk adódik minden $m \geq k \geq 0$ esetén. □

(6) igazolása, vázlat.
Mutassuk meg 1 tétel (1) pontja alapján alapján, ami a Pascal háromszög szimmetriáját fejezi ki, hogy ez közvetlenül adódik (5)-ből. □

4. Megjegyzés. *Az angolok az (5) és (6) azonosságokat hockey-stick identity néven, vagyis hokiütő-azonosságként tartják számon - ez segíthet a formula megjegyzésében is! Lásd 3. ábra.*