Véges matematika I. tanári gyakorlat

4. alkalom - megoldásvázlatok

Gyakorlatvezetõ: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

Új témák: rekurziók, szitamódszer

1. a) A húsvéti nyúl tízféle csokitojásból szeretne összesen harminc darabot hozni úgy, hogy mindegyik fajtából kapjak legalább egyet. Hányféleképpen alakulhat meglepetés?
b)* Végül mindből három-három darabot kaptam. Ezt a harminc édességet szeretném négy különböző kosárba betenni úgy, hogy minden egyes kosárban csupa különböző fajta legyen, és egyik kosár se maradjon üresen. Hányféleképpen tehetem ezt meg? (A kosarakon belül nincsenek sorbarendezve a tojások, és az egyforma tojásokat értelemszerűen nem különböztetem meg.)

Megoldásvázlat.
a) 20 gombóc és 9 pálcika sorrendjeivel lehet a kiválasztásokat kölcsönösen egyértelműen megfeleltetni. Valóban: először egyet-egyet kiveszünk a különféle fajtákból, aztán a pálcikák által elválasztott tíz rekesz szerint veszünk a különbözőkből, összesen további 20-at.) Eszerint a válasz $\binom{20+9}{9}$.
b) Minden fajtánál ki kell választani, melyik kosarakba kerül (azaz melyekbe nem), ez fajtánként 4, összesen 4^{10} lehetőség; rossz ezekből az a 4, amikor az egyik kosár üres (pontosan egy kosár bír üresen maradni).

2. Hányféleképpen tehetünk be 20 szál virágot 15 különböző színű vázába, ha
a) a virágok egyformák; **b)** a virágok egyformák és minden vázába kell jusson legalább egy;
c) a virágok különbözők; **d)** a virágok különbözők és minden vázába kell jusson legalább egy?

Megoldásvázlat.
Az **a)** és **c)** (és hasonlóan a **b)** és **d)**) részfeladatok között az a különbség, hogy az előbbinél csak azt kell megmondani, hogy melyik vázába mennyi virág kerüljön (hiszen egyformák), az utóbbinál azonban az is számít, mely virágok kerülnek az adott vázába.
a) Ismétléses kombináció (20 virág, 9 elválasztójel), tehát $\binom{29}{20}$.
b) Először minden vázába tegyünk egy-egy virágot (mivel egyformák, lényegtelen, hogy mely 10 virágot osztjuk ki itt), majd a maradék 10 virágot a **a)** feladat szellemében kiosztjuk. Tehát a megoldás $\binom{19}{10}$.
c) Virágonként 10 döntési lehetőségünk van, tehát 10^{20}.
d) (Itt nem volna jó, ha első körben minden vázába tennénk egy-egy virágot, mert a végeredményben nem tudjuk megkülönböztetni az „első körös” virágokat a később kiosztottaktól, míg a számolt döntési sorozatokban ez dokumentálva volna.) Az összes lehetséges kiosztás halmazát jelölje H, és legyen A_i azon kiosztások halmaza, amelyeknél az i. váza üresen marad, $1 \le i \le 10$. (Tehát pl az A_5-ben levő kiosztások azért rosszak, mert az ötödik váza üresen marad.) A jó kiosztások halmaza tehát $H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10})$. $|H| = 10^{20}$ (lásd **c)**). $|A_i| = 9^{20}$ (függetlenül az i-től), hiszen virágonként 9-féleképpen dönthetünk (az i. váza üresen kell maradjon). $|A_i \cap A_j| = 8^{20}$, mert jelenleg két váza tiltott (az i. és a j.). Hasonlóképpen egy k-as metszetnek $(10-k)^{20}$ eleme van (k váza tiltott). Általában k-as metszetből $\binom{10}{k}$ darab van, ezek elemszáma mind ugyanakkora. A szita-formula szerint tehát

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10})| = 10^{20} - 10 \cdot 9^{20} + \binom{10}{2} \cdot 8^{20} - \ldots + (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{20} + \ldots + (-1)^{10} \binom{10}{10} \cdot 0^{20}$$

$$= 10^{20} - \sum_{k=1}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{20} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{20}.$$

Kiegészítő magyarázat („mese”): a szummás alakok csak tömörítések, a válasz teljes értékű azok nélkül is. Vegyük észre, hogy az utolsó tag ($k = 10$-re) persze nulla, hiszen nincs olyan kiosztás, amelynél mind a 10 váza üresen maradna. A $k = 0$ pedig annak felel meg, amikor nincs tiltott váza, így nem meglepő, hogy $(-1)^0\binom{10}{0} \cdot (10-0)^{20} = 10^{20}$, pont az összes kiosztások számát kapjuk.

3. Igaz-e, hogy létezik két olyan különböző prímszám, amelynek azonos az utolsó 2023 számjegye?

Megoldásvázlat.

Igen. Végtelen sok prímszám van, véges sok utolsó 2023 jegyből álló végződés. Így lesz olyan végződés ami végtelen sok prím esetén szerepel a skatulya elv szerint. (Ahhoz hogy kettő prímet találjunk, elég mondjuk $10^{2023} + 1$ különböző prímszám halmazát tekinteni).

4. Egy 32 lapos magyarkártya-csomagot szétosztunk 4 játékos között. Hány olyan leosztás van, amelyben minden játékosnak jut legalább egy piros?

Megoldásvázlat.

Szita módszer. H összes kiosztás ahol mindenkinek 8 jut. A_i ezek közül azok halmaza, ahol az i. embernek $(i = 1, 2, 3, 4)$ nem jut piros. $|A_i|, |A_i \cap A_j|, |A_i \cap A_j \cap A_k|$ könnyen számolható, hiszen egy kiosztás mindig 4 döntés egymásutánjaként írható le: soron következő játékos a megmaradt és nem tiltott lapok közül hányféleképp kaphat 8at.

$$|H \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_4)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_3 \cap A_4|) -$$

$$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$= \binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8} - 4 \cdot \binom{24}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8} + \binom{4}{2}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{16}{8} - \binom{4}{3}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}\binom{8}{8} + 0.$$

5. Hányféleképpen fedhetünk le egy $2\times n$-es táblát 1×2-es dominókkal? (A dominók nem fedhetik át egymást és nem lóghatnak le a tábláról. A lefedéseknél a dominóknak csak az állása számít, nem a pöttyözésük)

Megoldásvázlat. Jelölje f_n a választ. Forgassuk be a táblát, hogy n oszlopa és 2 sora legyen. Tekintsük egy tetszőleges jó lefedést. Ennek a jobb felső mezője vagy vízszintes vagy függőleges állású dominóval van lefedve. Előző esetben ez alatt is vízszintes dominónak kell lennie a jobb alsó mező fedése miatt. A maradék dominók az első $n-2$ oszlopot fedik, amit f_{n-2}-féleképpen tehetünk meg. Az utóbbi esetben a maradék dominók az első $n-1$ oszlopot fedik, amiből f_{n-1} eset van.

A két eset egymás kizárja, így az $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ rekurzió adódik. A kezdeti értékek $f_1 = 1$ és $f_2 = 2$. Ez alapján $f_n = F_{n+1}$, ahol a jobb oldalon a Fibonacci-sorozat szerepel. Az explicit képlet a szokásos módszerrel megadható.

$$f_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

6. Egy 4-oldalú dobókockával többször egymás után dobunk, amelyen a számok sorban $1, 2, 3, 4$.
a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 5 lesz?
b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 33 lesz? Írjunk fel rekurziót arra az a_n számra, ahányféleképpen a dobott számok összege néhány dobás után n lehet!

7. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat:
a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$!
b)* $a_1 = 2$, $a_2 = 13$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$.

Egy $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ egyenlettel és az a_1, a_2 tagokkal megadott sorozat explicit képletét megkaphatjuk az alábbi lépésekkel.

1. Keresünk megoldást a rekurzióra mértani sorozatok közt: $x^{n+1} = c_1 x^n + c_2 x^{n-1}$. Átrendezve elég az $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeit meghatároznunk.
2. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1}$ alakban keressük.
3. Ha $x_1 = x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 (n-1) x_1^{n-1}$ alakban keressük.
4. A λ_1 és λ_2 értékeket az a_1 és a_2 kezdeti értékekhez igazítjuk (kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer).

8. 10 egyenes legfeljebb hány részre osztja fel a síkot?

Megoldásvázlat. Legyen a_n az n egyenes által meghatározott tartományok számának maximuma. Feltehetjük, hogy az egyenesek páronként különbözőek. Nyilván $a_0 = 1$.

Legyen tetszőleges n egyenes megadva a síkon. Ebből gondolatban töröljünk ki az egyik egyenest, mondjuk E-t. Definíció szerint most legfeljebb a_{n-1} tartomány keletkezik. E visszarajzolása annyival növeli meg a tartományok számát, amennyi régi tartományt kettévág. Vegyük észre, hogy ezen tartományok száma 1-gyel több, mint ahány különböző metszéspont keletkezik a többi egyenessel. Mivel E minden másik egyenest legfeljebb 1 pontban metsz, így a keletkező metszéspontok száma legfeljebb $n-1$, vagyis a keletkező tartományok száma legfeljebb $(n-1)+1 = n$ értékkel növekszik. Ez alapján $a_n \leq a_{n-1} + n$.

Másfelől tudunk mutatni olyan konfigurációt, ahol a becslés éles. Vegyünk $n-1$ darab egyenest, ami pontosan a_{n-1} tartományt határoz meg. A fentiek alapján egy olyan új E egyenest szeretnénk hozzáadni az eddigiekhez, ami minden egyenest metsz, ráadásul ezek a metszéspontok mind különbözőek. Ha E irányát a többi egyenes irányától különbözőnek választjuk meg, akkor E minden másik egyenest metszeni fog. Ebben az irányban csak véges sok egyenes meg át már meglévő metszéspontokon. Válasszuk így E-t olyannak, ami ezektől mind különböző. Ekkor keletkezik $a_{n-1} + n$ tartomány, ami a fentiek szerint optimális.

Vagyis $a_n = a_{n-1} + n$ a rekurziós képlet. Ezt többször alkalmazva kapjuk, hogy

$$a_n = n + a_{n-1} = n + (n-1) + a_{n-2} = \ldots n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 + a_0 = \frac{n(n+1)}{2} + a_0 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

A konkrét kérdéseket az $n = 10$ értékek helyettesítésével kapjuk.

9. Igazoljuk, hogy $k < n$ pozitív egészek esetén

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Javaslat: kombinatorikus úton, vagy algebrai úton is végiggondolhatjuk!

Megoldásvázlat.

Baloldal: egy k-tagú halmazt választunk n emberből, és az egyik kiválasztott embert megkoronázzuk.
Jobboldal: először megkoronázunk eg embert az n közül, majd kiválasztjuk a $k-1$-es társaságát.

$$k\binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

10. A Mikulásnak van 5-féle csokija, mindből 10 (egyforma) darab. Ezeket szeretné mind kiosztani 3 gyereknek úgy, hogy minden gyerek kapjon legalább egy csokit. Hányféleképpen oszthatja így ki?

Megoldásvázlat.

Először megnézzük, mi a teendő, ha nem gond az ha valaki egyáltalán nem kap. Ekkor minden csoki esetében ismétléses kombinációval kapjuk a választ, és ezeket az eredményeket szorozzuk (mert ezek független döntéseknek felelnek meg, és a döntéssorozat adja az összes kiosztást). Tehát így $\binom{10+2}{2}^5$ lenne a válasz.

Ez akkor az összes esetnek fele meg, és rossz az, ha valaki teljesen kimarad az osztásból. A_1, A_2, A_3 az ilyen rossz esetek jele, 1., 2. 3. kimaradó esetén. $|A_i|$ olyan, mintha csak két gyerek között osztogatnánk a csokit. $|A_i \cap A_j|$ meg olyan esetek, ahol csak az kap csokit aki nem i. és nem is j. Innen a szita-formula megadja a választ:

$$\binom{10+2}{2}^5 - 3\binom{10+1}{1}^5 + 3\binom{10+0}{0}^5.$$

11. Igazoljuk, hogy teljesül a következő:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^n.$$

Megoldásvázlat.

A baloldal megszámolja, hányféleképp oszthatunk ki n embernek n különböző sorszámot. A jobboldal ugyanezt számolja szitaformulával. H összes eset, amikor minden sorszámot külön-külön kiosztunk, nem figyelve olyan feltételre hogy mindenkinek jusson. Eszerint $|H| = n^n$. A_i rossz esetek $i = 1 \dots n$) azok, amikor az i. embernek nem jutott sorszám. Az A_i halmazok mérete és ezek metszeteinek mérete is könnyen számolható, és épp a jobboldalt kapjuk a szitaformulába beírva.