

# Véges matematika I. tanári gyakorlat

## 5. alkalom - 2024. április 12.

### Új témák: gráfos feladatok

- 8 házaspár hivatalos egy partiba. Mivel nem ismerik egymást, mindenki mindenkivel kezét fog, a házastársát kivéve. Hány kézfogás történik?
- 13 fős óvodás csoportban lehetséges-e, hogy mindenkinek a) 2 b) 3, c) 4 barátja van? (A barátságok kölcsönösek).
- \* Rajzoljuk 3-reguláris gráfot minden  $n \geq 4$  csúcsszám esetén, amikor létezik. Lehetséges-e, hogy találunk azonos csúcsszámú, de nem izomorf ilyen gráfokat? (Ha találunk, igazoljuk, hogy nem izomorfak.)
- Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka  
a) 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1 ?  
b) 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1 ?  
c) 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5 ?  
d) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6 ?
- Egy 6 pontú, egyszerű, összefüggő gráfban van 1, 2, 3, 4 és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka?
- Tekintsük azt az 5-pontú gráfot az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  csúcshalmazon, melynek éleit a következő halmaz adja meg:  
a)  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}\}$   
b)  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}\}$   
c)  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 1\}, \{4, 2\}\}$   
Egyszerűek ezek a gráfok? Összefüggőek ezek a gráfok? Amelyik egyszerű, annak rajzoljuk meg a komplementerét.
- Adjunk példát olyan gráfokra, amelyek izomorfak a komplementerükkel. Igaz-e, hogy minden  $n \geq 4$  esetén létezik ilyen példa?
- Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van egy kör. Mit lehet mondani a gráfról, ha minden pont foka 2?
- Rajzoljuk le az összes legfeljebb 6 pontú fát!
- \* Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. Azaz véges egyszerű gráfban mindig van két pont, amelyek fokszáma megegyezik.

### ismétlő feladatok

- Béni bácsi minden nap meglepi magát a cukrászdában (amíg van pénze), attól a naptól kezdve hogy megjön a nyugdíja. Az alábbiak közül választ mindig egyet: krémes (500 Ft), trüffeltorta (1000 Ft), Dobostorta (1000 Ft).  
Hányféleképpen költheti így el 15000 forintos nyugdíját?
- Hány olyan pozitív egész szám van 2023-ig, amelyik a 3, 4 és 5 számok közül  
a) legfeljebb kettőnek többszöröse?  
b) egynek sem többszöröse?

**13.\*** A Matematikus Hangversenyen 16-an lépnek fel. Bár a fellépési sorrendet előre kinyomtatták, műsorközlő kitalálta, hogy senkit sem akkor szólít, amikor a műsorközlő füzet szerint jönnie kellene. Hányféleképpen variálhatja meg az eredeti sorrendet?

**14.** Lássuk be a következő összefüggést:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

Mi köze ennek az ötös lottóhoz?

**15.** Egy dobozban 15 cédula van, 1-től 15-ig számozva. Kihúzzunk sorban 5 cédulát visszatevés nélkül. Hány esetben lesz a kihúzott számok mindegyike 5-nél nagyobb?

**16.** A húsvéti nyúl lepakolt egy fészekaljja tojást a sík egész  $(x, y)$  rácspontjai egyikére. Elárulta, hogy  $1 \leq x \leq 3$  és  $2 \leq y \leq 6$ . Hány barkochbakérdésből lehet kitalálni a helyét, ha nincs kedvünk keresgélni?