Véges matematika I. tanári gyakorlat

5. alkalom - 2023. október 17.

Gyakorlatvezető: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek: Rekurziók és Fibonacci sorozat. Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ha $n > 1$.

Egy $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ egyenlettel és az a_1, a_2 tagokkal megadott sorozat explicit képletét megkaphatjuk az alábbi lépésekkel.

1. Keresünk megoldást a rekurzióra mértani sorozatok közt: $x^{n+1} = c_1 x^n + c_2 x^{n-1}$. Átrendezve elég az $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeit meghatároznunk.
2. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1}$ alakban keressük.
3. Ha $x_1 = x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 (n-1) x_1^{n-1}$ alakban keressük.
4. A λ_1 és λ_2 értékeket az a_1 és a_2 kezdeti értékekhez igazítjuk (kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer).

Alapozás

1. Jelölje a_n azon n hosszúságú kockadobás-sorozatok számát, amelyekben nincs két hatos dobás közvetlenül egymás után. Írjuk fel az a_n sorozatot rekurzív módon!

2. 3 egyenes legfeljebb hány részre osztja fel a síkot? Hát 16 egyenes?

3. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat:
a) $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$;
b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$!

4.* Egy turista Bergengóciában minden nap egyet vásárol az alábbi áruk közül: fagylalt (1 Ft), gyümölcslé (2 Ft), képeslap (2 Ft).
Hányféleképpen költhet így el 15 forintot?

5. a) Hány olyan n hosszú a, b, c betűkből felépülő sorozat van, amelyben nincs két b betű egymás mellett?
b) Hány olyan n hosszú a, b, c betűkből felépülő sorozat van, amelyben nincs bc betűpár egymás mellett, ilyen sorrendben?

Gyakorlás

6. Hányféleképpen fedhetünk le egy $2 \times n$-es táblát 1×2-es dominókkal? (A dominók nem fedhetik át egymást és nem lóghatnak le a tábláról. A lefedéseknél a dominóknak csak az állása számít, nem a pöttyözésük)

7. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat:
a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$!
b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$.

8. Egy 4-oldalú dobókockával többször egymás után dobunk, amelyen a számok sorban $1, 2, 3, 4$.
a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 5 lesz? b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 33 lesz? Írjunk fel rekurziót arra az a_n számra, ahányféleképpen a dobott számok összege néhány dobás után n lehet!

9. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat:
a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$!
b)* $a_1 = 2$, $a_2 = 13$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$.

10. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$-re $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Kitekintés

11. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$-re F_n és F_{n+1} relatív prímek (vagyis nincs közös prímosztójuk).
(*Ötlet: indirekt úton lássunk neki a bizonyításnak.*

12. Hányféleképpen vehetünk le a polcon sorban egymás után lévõ n darab különbözõ könyvbõl k darabot úgy, hogy szomszédosakat nem szabad levennünk?

13. Hányféleképpen vehetünk le a polcon sorban egymás után lévõ n darab különbözõ könyvbõl néhány darabot úgy, hogy szomszédosakat nem szabad levennünk?

14. Tekintsük a következő átlós összegeket a Pascal háromszögben:
$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2 = F_3$
$\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3 = F_4$
$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 = F_5$
$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = F_6$.
Igazoljuk, hogy általában is teljesül a Fibonacci számokra, hogy

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-j}{j-1} + \binom{n-j-1}{j}, \quad \text{ahol } j = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor.$$