

Véges matematika I. tanári gyakorlat

6. feladatsor - 2023. október 24.

Fogalmak: **Gráf csúcsok halmazából és csúcspárok halmazából** (élekből) áll. Két gráf egymásnak megfeleltethető (**izomorf**) ha van a csúcshalmazaik között olyan megfeleltetés, ami az élek között is megfeleltetést létesít. G **reguláris** ha minden fokszáma egyforma. A gráf **egyszerű** ha nincs többszörös éle vagy hurokéle.

1. 10 házaspár hivatalos egy partiba. Mivel nem ismerik egymást, mindenki mindenkivel kezét fog, a házastársát kivéve. Hány kézfogás történik?

2. 13 fős óvodás csoportban lehetséges-e, hogy mindenkinek a) 2 b) 3, c) 4 barátja van? (A barátságok kölcsönösek).

3. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka

a) 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1 ?

b) 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1 ?

c) 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5 ?

d) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6 ?

4. Egy 6 pontú, egyszerű, összefüggő gráfban van 1, 2, 3, 4 és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka?

5. Tekintsük azt az 5-pontú gráfot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ csúcshalmazon, melynek éleit a következő halmaz adja meg:

a) $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}\}$

b) $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}\}$

c) $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 1\}, \{4, 2\}\}$

Egyszerűek ezek a gráfok? Összefüggőek ezek a gráfok? Amelyik egyszerű, annak rajzoljuk meg a komplementerét.

6. Adjunk példát olyan gráfokra, amelyek izomorfak a komplementerükkel. Igaz-e, hogy minden $n \geq 4$ esetén létezik ilyen példa?

7. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van egy kör. Mit lehet mondani a gráfról, ha minden pont foka 2?

8.* Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. Azaz véges egyszerű gráfban mindig van két pont, amelyek fokszáma megegyezik.

Gyakorlás

9. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, 2, \dots, 100\}$. Összefüggő-e G , ha az éleket a következőképpen adjuk meg:

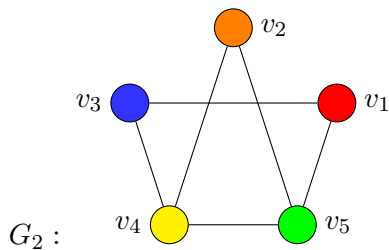
a) i és j pontosan akkor vannak összekötve, ha $i - j$ páratlan?

b) i és j pontosan akkor vannak összekötve, ha $i - j$ 3-mal osztható, és $i \neq j$?

c) i és j pontosan akkor vannak összekötve, ha $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 8$?

10. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka legalább n . Mutassuk meg, hogy G összefüggő!

11. Izomorf-e a következő két gráf? $G_1: V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}, E(G_1) = \{ab, ac, ae, bd, be, cd.\}$



12.* Rajzoljuk 3-reguláris gráfot minden $n \geq 4$ csúcyszám esetén, amikor létezik. Lehetséges-e, hogy találunk azonos csúcyszámú, de nem izomorf ilyen gráfokat? (Ha találunk, igazoljuk, hogy nem izomorfak.)

13. Megadható-e egy 1000-elemű halmaznak 27 részhalmaza úgy, hogy bármelyik részhalmaz pontosan 7 másikat metsz?

14. Egy 10 pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 7. Bizonyítsuk be, hogy bármely három pontnak van közös szomszédja!

Kitekintés

15. Van 25 ló, és egy versenypálya, amin egyszerre legfeljebb 5 ló futhat. Válasszuk ki minél kevesebb futam segítségével a leggyorsabb 3 lovat! A lovak egymáshoz viszonyított teljesítménye versenyek között nem változik, viszont a futamok időeredményeit nem ismerjük, csak az adott futamokon belüli helyezési sorrendeket tudjuk megállapítani.

16. A Bergengóc Open nevű teniszerenyre 79 igazolt teniszjátékos nevezett be. Kieséses kupasorozatba rendezik őket, akinek egy fordulóban nem jut ellenfele, automatikusan továbbjut. Ma játszották a döntőt. Mit írjon a helyi lapnak az újságíró, hány mérkőzés lehetett?