Véges matematika I. tanári gyakorlat

5. alkalom, megoldásvázlatok

Gyakorlatvezető: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek: Rekurziók és Fibonacci sorozat. Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ha $n > 1$.

Egy $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ egyenlettel és az a_1, a_2 tagokkal megadott sorozat explicit képletét megkaphatjuk az alábbi lépésekkel.

1. Keresünk megoldást a rekurzióra mértani sorozatok közt: $x^{n+1} = c_1 x^n + c_2 x^{n-1}$. Átrendezve elég az $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeit meghatározni.
2. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1}$ alakban keressük.
3. Ha $x_1 = x_2$, akkor a megoldást $a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 (n-1) x_1^{n-1}$ alakban keressük.
4. A λ_1 és λ_2 értékeket az a_1 és a_2 kezdeti értékekhez igazítjuk (kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer).

Alapozás

1. Jelölje a_n azon n hosszúságú kockadobás-sorozatok számát, amelyekben nincs két hatos dobás közvetlenül egymás után. Írjuk fel az a_n sorozatot rekurzív módon!

Megoldásvázlat. Könnyű látni, hogy $a_1 = 6$ és $a_2 = 6^2 - 1 = 35$. Legyen most $n \geq 3$. Egy ilyen kockadobás-sorozat kétféle lehet: vagy 6-osra végződik vagy nem.

Az első esetben az utolsó előtti dobás 5-féle lehet. Az ezelőtti $n-2$ darabot meg a_{n-2}-féleképpen tehetjük meg, hiszen az utolsó 3 dobás között így nem lehet két szomszédos hatos. A két döntés egymástól független, így összesen $5 \cdot a_{n-2}$ sorozat van, ami 6-osra végződik.

A másik esetben az utolsó dobás 5-féle lehet. Az ezelőtti $n - 1$ darabnál csak arra kell figyelni, hogy azok között ne legyen szomszédos 6-os (hiszen az utolsó két dobás nem lesz mind 6-os), vagyis erre a_{n-1} lehetőségünk van.

A két eset egymást kizárja, így a teljes esetszám a kettő összege, vagyis $a_n = 5a_{n-2} + 5a_{n-1}$.

(Megjegyzendő, hogy $a_0 = 1$ választás mellett már a_2 értékét is tudjuk a rekurzív képlettel számolni.)

2. 3 egyenes legfeljebb hány részre osztja fel a síkot? Hát 16 egyenes?

Megoldásvázlat. Legyen a_n az n egyenes által meghatározott tartományok számának maximuma. Feltehetjük, hogy az egyenesek páronként különbözőek. Nyilván $a_0 = 1$.

Legyen tetszőleges n egyenes megadva a síkon. Ebből gondolatban töröljünk ki az egyik egyenest, mondjuk E-t. Definíció szerint most legfeljebb a_{n-1} tartomány keletkezik. E visszarajzolása annyival növeli meg a tartományok számát, amennyi régi tartományt kettévág. Vegyük észre, hogy ezen tartományok száma 1-gyel több, mint ahány különböző metszéspont keletkezik a többi egyenessel. Mivel E minden másik egyenest legfeljebb 1 pontban metsz, így a keletkező metszéspontok száma legfeljebb $n - 1$, vagyis a keletkező tartományok száma legfeljebb $(n - 1) + 1 = n$ értékkel növekszik. Ez alapján $a_n \leq a_{n-1} + n$.

Másfelől tudunk mutatni olyan konfigurációt, ahol a becslés éles. Vegyünk $n - 1$ darab egyenest, ami pontosan a_{n-1} tartományt határoz meg. A fentiek alapján egy olyan új E egyenest szeretnénk hozzáadni az eddigiekhez, ami minden egyenest metsz, ráadásul ezek a metszéspontok mind különbözőek. Ha E irányát a többi egyenes irányától különbözőnek választjuk meg, akkor E minden másik egyenest metszeni fog. Ebben az irányban csak véges sok egyenes meg át már meglévő metszéspontokon. Válasszuk így E-t olyannak, ami ezektől mind különböző. Ekkor keletkezik $a_{n-1}+n$ tartomány, ami a fentiek szerint optimális.

Vagyis $a_n = a_{n-1} + n$ a rekurziós képlet. Ezt többször alkalmazva kapjuk, hogy

$$a_n = n + a_{n-1} = n + (n-1) + a_{n-2} = \dots n + (n-1) + \dots + 2 + 1 + a_0 = \frac{n(n+1)}{2} + a_0 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

A konkrét kérdéseket az $n = 3$ és $n = 16$ értékek helyettesítésével kapjuk.

(Bónusz: A fenti képlet más alakban $a_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$. Számoljuk ki, hogy a két képlet miért egyezik meg, és keressünk kombinatorikai érvelést arra, hogy a megoldás még egyezik meg az új képlettel. Tipp: metszéspontok száma, egyenesek száma, kiindulási tartomány(ok) száma.)

3. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat!
a) $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$
b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$

Megoldásvázlat.

a) Az $x^2 = 2x + 2$ egyenlet megoldásai $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Így a megoldást az $a_n = \lambda_1 \cdot (1+\sqrt{3})^{n-1} + \lambda_2 \cdot (1-\sqrt{3})^{n-1}$ alakban keressük. Az $a_1 = 3$ és $a_2 = 8$ feltételek adnak két egyenletet λ_1, λ_2 értékére, amit megoldva adódik a megoldás.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{9+5\sqrt{3}}{6} \cdot (1+\sqrt{3})^{n-1} + \frac{9-5\sqrt{3}}{6} \cdot (1-\sqrt{3})^{n-1} \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \cdot (1+\sqrt{3})^{n} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \cdot (1-\sqrt{3})^{n} \end{aligned}$$

b) Az $x^2 = 10x - 25$ egyenletnek csak az $x = 5$ a megoldása, így most a megoldást az $a_n = \lambda_1 5^{n-1} + \lambda_2 (n-1)5^{n-1}$ alakban keressük. A $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ feltételekből meghatározzuk λ_1, λ_2 megfelelő értékeit.

$$\begin{aligned} a_n &= 5^{n-1} - \frac{2}{5} \cdot (n-1) \cdot 5^{n-1} \\ &= \frac{7}{25} \cdot 5^n - \frac{2}{25} \cdot n \cdot 5^n \end{aligned}$$

4.* Egy turista Bergengóciában minden nap egyet vásárol az alábbi áruk közül: fagylalt (1 Ft), gyümölcslé (2 Ft), képeslap (2 Ft).

Hányféleképpen költhet így el 15 forintot?

5. a) Hány olyan n hosszú a, b, c betűkből felépülő sorozat van, amelyben nincs két b betű egymás mellett?
b) Hány olyan n hosszú a, b, c betűkből felépülő sorozat van, amelyben nincs bc betűpár egymás mellett, ilyen sorrendben?

Megoldásvázlat.

a) Jelölje a_n a választ. Könnyű megszámolni, hogy $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3^2 - 1 = 8$. Az 1. feladathoz hasonlóan $n \geq 2$ esetén $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ adódik. Ennek a rekurziónak a zárt képletét már kiszámoltuk a 3/a. feladatban.

b) Jelölje b_n a választ. Tekintsük H alaphalmazként azokat az n karakterből álló sorozatokat, ahol az első $n-1$ karakter között nem szerepel a bc betűpár. Ekkor $|H| = b_{n-1} \cdot 3$, hiszen az első $n-1$ karaktert b_{n-1}-féleképpen választhatjuk, az utolsó pedig tetszőleges lehet a 3 karakter közül. Az összes b_n-hez tartozó sorozat a H alaphalmahzba tartozik. Viszont H nem minden sorozata megfelelő, mert ott még lehet bc végződés. Az ilyen rossz sorozatok úgy néznek ki, hogy az első $n-2$ karaktere között nincs bc betűpár és az utolsó két karaktere bc. Vagyis a rossz esetek száma b_{n-2}.

Így a jó esetek száma $b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}$. Az első néhány értéket könnyen meghatározzuk: $b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 3^2 - 1 = 8$. Ezt a rekurzívanmegadott sorozatot a szokásos módszerekkel megoldva megkapjuk az explicit választ.

$$b_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Gyakorlás

6. Hányféleképpen fedhetünk le egy $2\times n$-es táblát 1×2-es dominókkal? (A dominók nem fedhetik át egymást és nem lóghatnak le a tábláról. A lefedéseknél a dominóknak csak az állása számít, nem a pöttyözésük)

Megoldásvázlat. Jelölje f_n a választ. Forgassuk be a táblát, hogy n oszlopa és 2 sora legyen. Tekintsük egy tetszőleges jó lefedést. Ennek a jobb felső mezője vagy vízszintes vagy függőleges állású dominóval van lefedve. Előző esetben ez alatt is vízszintes dominónak kell lennie a jobb alsó mező fedése miatt. A maradék dominók az első $n-2$ oszlopot fedik, amit f_{n-2}-féleképpen tehetünk meg. Az utóbbi esetben a maradék dominók az első $n-1$ oszlopot fedik, amiből f_{n-1} eset van.

A két eset egymás kizárja, így az $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ rekurzió adódik. A kezdeti értékek $f_1 = 1$ és $f_2 = 2$. Ez alapján $f_n = F_{n+1}$, ahol a jobb oldalon a Fibonacci-sorozat szerepel. Az explicit képlet a szokásos módszerrel megadható.

$$f_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

7. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat!

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$

Megoldásvázlat.

a) Itt a másodfokú egyenlet diszkrimináns 0, így két gyök egybeesik: $x_1 = x_2 = 1$. Ennek megfelelően a megoldást az $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n$ alakban keressük. A és B értéke $a_1 = 1$ és $a_2 = 3$ egyenletekből adódik.

$$a_n = -1 + 2n$$

b) Itt a másodfokú egyenlet megoldásai (különböző) komplex számok.
(Aki nem látott ilyen állatfajt, ne ijedjen meg - ez egy kitekintő feladat, hogy lássunk rá: előfordulhat hogy a megoldás közben ki kell lépnünk a valósok köréből - ahogy a másodfokú egyenletek megoldásánál is szembesülhetünk ezzel a kihívással - de ha kilépünk, a komplex számokkal ugyanúgy bánhatunk. ZH-n biztos nem lesz ilyen.) Ez a módszert semmiben lényeges részében nem érinti, és a következő eredményt adja.

$$a_n = \frac{-4-11i\sqrt{2}}{12} \cdot \left(1 + i\sqrt{2}\right)^n + \frac{-4+11i\sqrt{2}}{12} \cdot \left(1 - i\sqrt{2}\right)^n$$

(Tananyagon túli megjegyzés. Mivel az eredeti rekurzióból látszik, hogy a_n értéke egy valós szám, ezért az explicit képlet is egy valós számot ad – a zárójelek kibontása és az $i^2 = -1$ egyenlet alkalmazása után. $1 \pm i\sqrt{2} = e^{\pm i\alpha}$, ahol $\alpha = \arctan(\sqrt{2}) \approx 0.955317$rad. Így a komplex exponenciális függvények lineáris kombinációját átválthatjuk valós értékű szögfüggvények lineáris kombinációjává, ld. `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula`. Ez az $a_n = \frac{11\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{3}^n \sin(\alpha n) - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}^n \cos(\alpha n)$ képletet adja.)

8. Egy 4-oldalú dobókockával többször egymás után dobunk, amelyen a számok sorban $1, 2, 3, 4$.
a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 5 lesz? b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy néhány dobás utána dobott számok összege éppen 13 lesz? Írjunk fel rekurziót arra az a_n számra, ahányféleképpen a dobott számok összege néhány dobás után n lehet!

Megoldásvázlat. $a_0 = 1$ (0 dobás), $a_1 = 1$ (1), $a_2 = 2$ ($2 = 1+1$), $a_3 = 4$ ($3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$), $a_4 = 8$ ($4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 2+2 = 3+1 = 1+3$).

A rekurzió megtalálásához csoportosítsuk az n összegű sorozatokat az utolsó tagja szerint. A k-ra végződőkből a_{n-k} darab van, ahol $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Így $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$.

Vegyük észre, hogy a_4 érték külön kiszámolására nincs szükség, ha a_0-t meghatároztuk, mert az már a rekurzióból is kijön.

(Tananyagon túli megjegyzés. Az explicit képlet $a_n = \sum_{k=1}^{4} A_k x_k^n$, ahol x_k a $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$ egyenlet (komplex) megoldásai, A_k értékét pedig a kezdeti feltételekre illesztve kapjuk.)

9. Oldjuk meg az alábbi rekurziókat!

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

b)* $a_1 = 2$, $a_2 = 13$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$

Megoldásvázlat.

a) A megoldás során a másodfokú polinom mindkét gyöke a 2 szám. Az eredmény: $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n + \frac{1}{4} \cdot n \cdot 2^n$.

10. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$-re $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Megoldásvázlat.

Használjunk indukciót n-re. Az $n = 1$ esetben $F_1^2 = 1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2$. Legyen most $n > 1$. Ekkor az indukciós feltételt $n - 1$ esetén és a $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ rekurziót felhasználva azt kapjuk, hogy $F_1^2 + \ldots F_{n-1}^2 = (F_1^2 + \cdots + F_{n-1}^2) + F_n^2 = (F_{n-1} \cdot F_n) + F_n^2 = F_n \cdot (F_{n-1} + F_n) = F_n \cdot F_{n+1}$, ami a bizonyítandó állítás n-re.

Kitekintés

11. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$-re F_n és F_{n+1} relatív prímek (vagyis nincs közös prímosztójuk).
(*Ötlet: indirekt úton lássunk neki a bizonyításnak.*

Megoldásvázlat. Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan $n \geq 0$ index, amire F_n és F_{n+1}) *nem* relatív prímek. Legyen d e két szám egy tetszőleges, de 1-nél nagyobb közös osztója. Mivel $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ és a bal oldal mindkét tagja osztható d-vel, így a jobb oldali F_{n-1} is osztható d-vel. Tehát d osztja F_{n-1} és F_n számokat is, vagyis ezek sem relatív prímek.

Ezzel azt láttuk be, hogyha két egymás melletti Fibonacci szám relatív prím, akkor az eggyel előrébb szereplő számpár is relatív prím. Indukciót alkalmazva az kapjuk, hogy az összes $k \leq n$ esetén F_k és F_{k+1} *nem* relatív prímek.

Ez viszont ellentmondás, hiszen $k = 0$ esetén $F_0 = 0$ és $F_1 = 1$ relatív prímek.

12. Hányféleképpen vehetünk le a polcon sorban egymás után lévõ n darab különbözõ könyvbõl k darabot úgy, hogy szomszédosakat nem szabad levennünk?

Megoldásvázlat. A feladatot bijekcióval oldjuk meg. Legyenek a kiválasztott könyvek (balról) az $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ pozíciókban.

Ebből készítsünk egy k darab (ugyanolyan) pálcikából és $n - k$ darab (ugyanolyan) gombócból álló sorozatot, ahol a pálcikákat az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ helyre tesszük le (a maradékokra pedig a gombócok kerülnek). A feladat feltételeiből következően ez egy olyan sorozat, ahol két pálcika nem lehet egymás mellett. Az ilyen sorozatok bijekcióban állnak a kiválasztott könyvekkel.

Egy ilyen gombóc–pálcika sorozatból vegyünk ki minden két szomszédos pálcika közül egy-egy gombócot. (Vegyük észre, hogy ott mindig legalább 1 gombóc van a fenti feltétel miatt.) Az így kapott új gombóc–pálcika sorozat k pálcikát és $n - k - (k - 1) = n - 2k + 1$ gombócot használ. Az ilyen (megkötés nélküli) új sorozatok bijekcióban állnak a régi sorozatokat.

Az új sorozatok száma $\binom{k+(n-2k+1)}{k} = \binom{n-k+1}{k}$, hiszen elég kiválasztani, hogy az összesen $n - k + 1$ hely közül hova tesszük le a k darab pálcikát. Így a (dupla) bijekció miatt $\binom{n-k+1}{k}$ választás van a könyvekre.

13. Hányféleképpen vehetünk le a polcon sorban egymás után lévõ n darab különbözõ könyvbõl néhány darabot úgy, hogy szomszédosakat nem szabad levennünk?

Megoldásvázlat: első gondolatmenet. Az előző feladat megoldását felhasználva kapjuk, hogy a megoldás $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k} = \binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots$, hiszen a különböző k -értékekhez tartozó esetek egymás kizáróak.

Vegyük észre, hogy ha $k > n+1-k$ (vagyis is ha $k > \frac{n+1}{2}$), akkor a binomiális együttható értéke 0, így az összegzést elég lenne a $0 \le k \le \frac{n+1}{2}$ értékekre elvégezni.

Megoldásvázlat: második gondolatmenet. Oldjuk meg a feladatot rekurzióval. A feladatra tekinthetünk úgy is, hogy egy pénzérmét n-szer feldobunk, és ha a k. dobásra írást kapunk, akkor levesszük a polcról a k. könyvet. A feladat miatt az a feltételünk, hogy két írás ne dobjunk ki egymás után.

Ez a feladat az első feladat megoldásában leírtakhoz teljesen analóg módon megoldható. Ha f_n-nel jelöljük a választ, akkor a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ rekurziót kapjuk a $f_0 = 1$, $f_1 = 2$ kezdeti értékekkel. Ez pont a Fibonacci-sorozat átindexelve, tehát a megoldás

$$f_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}.$$

14. Tekintsük a következő átlós összegeket a Pascal háromszögben:
$\binom{2}{0}+\binom{1}{1} = 2 = F_3$
$\binom{3}{0}+\binom{2}{1} = 3 = F_4$
$\binom{4}{0}+\binom{3}{1}+\binom{2}{2} = 5 = F_5$
$\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2} = 8 = F_6.$
Igazoljuk, hogy általában is teljesül a Fibonacci számokra, hogy

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-j}{j-1} + \binom{n-j-1}{j}, \quad \text{ahol } j = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor.$$

Megoldásvázlat. Kombinatorikusan, kétszeres leszámlálással oldjuk meg a feladatot. Az előző két feladat megoldása miatt a bizonyítandó egyenlet mindkét oldala azt számolja meg, hogy $n-2$ darab különböző könyvből hányféleképpen tudunk néhányat kiválasztani, hogy szomszédosakat nem szabad kiválasztani.

Megjegyzés- 2. megoldás. A feladatot indukcióval is meg lehet oldani. Ehhez az összes binomiális együtthatót cseréljük le a Pascal-háromszögben a fölötte lévő kettő binomiális együttható összegére, és használjuk az indukciós feltételt $n-1$ és $n-2$ értékekre, valamint a Fibonacci-sorozat rekurzióját.