Véges matematika I. tanári gyakorlat

7. feladatsor - 2023. november 14-21.

Gyakorlatvezető: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

Alapozás

EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek: Euler körséta: minden élen pontosan egyszer áthaladó séta, aminek kezdő és végpontja megegyezik., Hamilton kör és Hamilton út: minden pontot ponton áthaladó kör ill. út. Emlék: Tétel Euler-körséta létezéséről; szükséges feltétel Hamilton-kör létezéséhez, elégséges feltétel Hamilton-.kör létezéséhez (Dirac).

1. Rajzoljuk le az összes legfeljebb 6 pontú fát!

2. Igazoljuk, hogy ha egy fában van k-adfokú pont, akkor legalább k db elsõfokú pont van benne!

3. Mutassunk olyan egyszerű gráfot, amely tartalmaz Euler-körsétát, páros sok pontja és páratlan sok éle van!

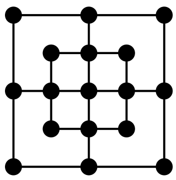
4. Legalább hányszor kell felemelni a ceruzát a $K_{5,6}$ teljes páros gráf lerajzolásakor?

5. Egy egyszerû G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve Hamilton-utat?

6. Egy sakktáblát szeretnénk lóugrásban bejárni úgy, hogy minden mezõre pontosan egyszer lépünk. Lehetséges-e ez, ha a tábla
a) 4×4-es;
b) 5×5-ös;
c) 5×5-ös, és azt is megköveteljük, hogy az utolsó lépésben visszatérhessünk a kiindulási mezõre?

7. Van-e olyan 6 pontú, 3-reguláris egyszerû gráf, amelyben nincs Hamilton-kör?

8. Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfban?



Gyakorlás

9.* Igazoljuk, hogy ha egy fában van két 8-adfokú pont és három 3-adfokú, akkor legalább 17 db elsõfokú pont van benne!

10. (Kulcsfeladat EA-hoz) Mutassuk meg, hogy páros gráfban minden kör páros hosszúságú! Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban minden kör páros hosszúságú akkor páros!

11. (Kulcsfeladat EA-hoz)
a) Mutassuk meg, hogy nincs olyan egyszerű gráf, aminek fokszámsorozata 1,1,1,1,3,7,8,8,8,8.
b) Mutassuk meg, hogy ha létezik n csúcsú egyszerű gráf $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ fokszámokkal, akkor tetszőleges k-ra ($1 \leq k \leq n$ mellett)

$$d_1 + \ldots + d_{n-k} \geq d_{n-k+1} + \ldots + d_n - k(k-1).$$

12. Van-e olyan 10 pontú gráf, amelyben van Euler-körséta, és a csúcsok fokszámainak összege 34?

13. Az F fának 17 csúcsa van, és bármely csúcsának fokszáma 1 vagy 4. Határozzuk meg, legalább hány élt kell F-be behúzni ahhoz, hogy a keletkezõ gráfnak legyen Euler-körsétája!

14. Igazoljuk hogy tetszõleges G Euler-gráf élei megirányíthatóak úgy, hogy bármely csúcs ki- és befoka legfeljebb eggyel térjen el egymástól.
Igazoljuk, hogy ez nemcsak Euler-gráfokra, hanem tetszőleges gráfra is igaz!

15. Mutassunk példát olyan 3-reguláris egyszerû összefüggõ gráfra, amelyben nincs Hamilton-út!

16.* a) Egy 1000 csúcsú gráfban minden pont foka legalább 750. Bizonyítsuk be, hogy "sok" éldiszjunkt Hamilton-kör van benne! Mennyit tudunk igazolni? b) Mennyi Hamilton-kör van egy $K_{n,n}$ gráfban?

17. Mutassunk példát olyan 3-reguláris egyszerű összefüggõ gráfra, amelyben nincs Hamilton-út!

18. Igaz-e, hogy ha egy egyszerű gráfnak $2n+1$ pontja van, és minden pont foka legalább n, akkor a gráfban van Hamilton-út?

19.* A boltban vásároltunk 100 piros, 150 kék és 200 darab zöld színû gyöngyöt. Bizonyítsuk be, hogy lehet olyan nyakláncot készíteni az összes gyöngy felhasználásával, amelyben azonos színû gyöngyök nem kerülnek egymás mellé! Mi köze ennek a gráfokhoz? Általánosan a pontos feltétele annak a gyöngyszámok 3 paramétere szerint fel lehessen õket így fûzni?

20.* Egy teljes gráf minden élét tetszõleges irányban megirányítottuk. Mutassuk meg, hogy a kapott gráfban mindig van irányított Hamilton-út!

Kitekintő

21.* Bejárható-e a 8×8-as sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezõn pontosan egyszer járunk, és a végén visszaérünk a kiindulópontba?

22.* Egy társaságban mindenki 4 másik embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetõk néhány kör asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje mindkét szomszédját!