Véges matematika I. tanári gyakorlat

6. feladatsor - megoldásvázlatok

Fogalmak: **Gráf csúcsok halmazából és csúcspárok halmazából** (élekből) áll. Két gráf egymásnak megfeleltethető (**izomorf**) ha van a csúcshalmazaik között olyan megfeleltetés, ami az élek között is megfeleltetést létesít. G **reguláris** ha minden fokszáma egyforma. A gráf **egyszerű** ha nincs többszörös éle vagy hurokéle.

1. 10 házaspár hivatalos egy partiba. Mivel nem ismerik egymást, mindenki mindenkivel kezet fog, a házastársát kivéve. Hány kézfogás történik?
I. Megoldásvázlat. Mindenki 18 fővel fog kezet. A $20 \cdot 18$ minden kézfogást kétszer számol (mindkét részvevőnél), így a válasz $\frac{20 \cdot 18}{2}$.
II. Megoldásvázlat. Feleltessük meg egy gráf csúcsainak az embereket, éleknek a kézfogásokat. Ekkor az élhalmaz mérete éppen annyi, mintha a 10 házaspárnak megfelelő élek számát a teljes gráf élszámából kivonnánk, vagyis az eredmény $\binom{20}{2} - 10$.

2. 13 fős óvodás csoportban lehetséges-e, hogy mindenkinek a) 2 b) 3, c) 4 barátja van? (A barátságok kölcsönösek).
Megoldásvázlat. a) igen. Gráfos megfeleltetést nézve, bármilyen 2-reguláris 13 csúcsú példa mutatja hogy lehetséges. Minden 2-reguláris gráf diszjunkt körök uniója. Tehát esetünkben lehet C_{13}, vagy $C_3 \cup C_{10}$ pl.
b) nem lehet. Az összfokszám páratlan lenne, pedig a fokszámtétel szerint a fokszámösszeg páros, hiszen az élszám duplája.
c) Lehet. Vegyünk két éldiszjunk 13 csúcsú Hamilton kört, például; akár úgy, hogy összekötjük egy szabályos 13 szög csúcsai közül a szomszédosakat és a másodszomszédosakat.

3. Van-e olyan egyszerû gráf, amelyben a pontok foka

a) $3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$?
b) $6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1$?
c) $7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5$?
d) $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$?

Megoldásvázlat. a) igen, lehet rá konstrukciót rajzolni.
b) nem, fokszámösszeg páratlan, ami a Fokszámtétel miatt nem realizálható (egyszerű) gráffal.
c) ez az a)belinek a komplementere. Ha a)-ra van jó példa, akkor itt is.
d) 7 csúcs van, köztük kettőre 6 a fokszám előírás. Ha ez teljesülne, akkor ők minden csúccsal össze lennének kötve. Másrészt van 1 fokszámú, az meg csak az egyikükkel lehet összekötve; ez tehát lehetetlen hogy egyszerre megvalósuljon.

4. Egy 6 pontú, egyszerû, összefüggõ gráfban van 1, 2, 3, 4 és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka?
Megoldásvázlat. Fokszámtétel miatt (fokszámösszegból adódóan) csak páratlan lehet, és persze legfeljebb 5, hiszen 6 csúcs van. Az 1 és az 5 lehetetlen a fokszámeloszlás miatt (lásd 4d), 3 lehetséges, van konstrukció.

5. Tekintsük azt az 5-pontú gráfot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ csúcshalmazon, melynek éleit a következő halmaz adja meg:
a) $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}\}$
b) $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}\}$
c) $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 1\}, \{4, 2\}\}$
Egyszerűek ezek a gráfok? Összefüggőek ezek a gráfok? Amelyik egyszerű, annak rajzoljuk meg a komplementerét.

Megoldásvázlat. a) nem egyszerű, mert van párhuzamos él $\{1,4\}$, és nem is összefüggő mert az $'5'$ izolált csúcs.
b) egyszerű, de nem összefüggő, most a $'4'$ az izolált csúcs.
c) egyszerű és összefüggő.

6. Adjunk példát olyan gráfokra, amelyek izomorfak a komplementerükkel. Igaz-e, hogy minden $n \geq 4$ esetén létezik ilyen példa?

Megoldásvázlat. 4 csúcsú út jó, 5 hosszú kör C_5 jó. 6-csúcsú példa nincs, mert ha G és komplementere izomorf, akkor persze ugyanannyi az élszámuk, és az élszámok összege $\binom{6}{2}$, de ez páratlan szám.

7. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van egy kör. Mit lehet mondani a gráfról, ha minden pont foka 2?

Megoldásvázlat. Ha minden pont foka legalább 2, akkor egy csúcsból elindulva mindig továbbléphetünk egy következő csúcsba úgy, hogy nem lépünk egyszer sem vissza élen. Mivel a gráf véges, ez csak akkor lehetséges, ha egyszer visszatérünk egy már meglátogatott csúcsba. Az első visszatérés egy kört határoz meg.
Ha minden fok 2, akkor az előző eljárás kört ad. Ha a gráf összefüggő, akkor kellett midnen csúcsban járnunk. Ha nem összefüggő, akkor így azt kapjuk hogy a gráf körök diszjunkt uniója.

8.* Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. Azaz véges egyszerű gráfban mindig van két pont, amelyek fokszáma megegyezik.

Megoldásvázlat. n lehetséges fokszám merül fel: $0, 1, 2, \dots n-1$. Ha n csúcsú gráfban minden fok különböző, akkor az előző fokszámok mindegyikének elő kellene fordulnia. De ez lehetetlen, mert 0 és $n-1$ fokú csúcs egyszerre nem létezhet, az egyik kizárja a másikat.

Gyakorlás

9. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, 2, \dots, 100\}$. Összefüggõ-e G, ha az éleket a következõképpen adjuk meg:
a) i és j pontosan akkor vannak összekötve, ha $i-j$ páratlan?
b) i és j pontosan akkor vannak összekötve, ha $i-j$ 3-mal osztható, és $i \neq j$?
c) i és j pontosan akkor vannak összekötve, ha $|i-j| = 3$ vagy $|i-j| = 8$?

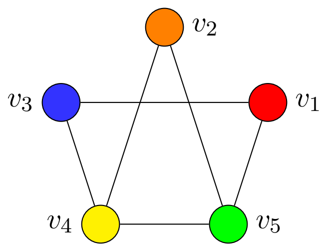
Megoldásvázlat. a) igen. Néhány magyarázat: az $|i-j| = 1$ által meghatározott élek egy minden csúcsot tartalmazó utat adnak meg. Vagy: 1 össze van kötve minden párossal, köztük a 2-vel, 2 össze van kötve minden páratlannal. Így minden csúcsból mindegyikbe eljuthatunk kettő hosszúságú úton. Vagy ismét másképp: ez a gráf a $K_{50,50}$ teljes páros gráf.
Általános megállapítás: elegendő ellenőrízni, hogy EGY ADOTT CSÚCSBÓL mindenhova el lehet jutni sétán (vagy úton). Elegendő egy összefüggő részgráfot felmutatni.
b) nem. Három teljes gráfból áll a gráf K_{34}, K_{33}, K_{33}, a 3-as maradékok szerint.
c) igen. $|i-j| = 3$ élhalmaz három különálló utat ad meg (amik egyenként azonos 3-as maradékú szűmokat kötnek össze), $|i-j| = 8$ élek pedig összeköttetést tudnak adni a három út közt.

10. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerû gráf, amelyben minden pont foka legalább n. Mutassuk meg, hogy G összefüggõ!

Megoldásvázlat. Indirekt. Ha nem lenne az, akkor két diszjunkt feszített részgráfból (G_1, G_2) állna a gráf, amik között nem mennek élek. De mindkettőben legalább $n+1$ csúcsnak kellene lennie ahhoz, hogy a fokszámok elérjék az n értéket. Ez viszont ellentmondás mert összesen is csak $2n$ csúcs van.

11. Izomorf-e a következő két gráf? G_1: $V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}, E(G_1) = \{ab, ac, ae, bd, be, cd.\}$

G_2 :



Megoldásvázlat. Igen. Legyen a megfeleltetés: $\varphi(a) = 5, \varphi(b) = 4, \varphi(c) = 1, \varphi(d) = 3, \varphi(e) = 2$. Ekkor az $E(G_1)$ élhalmaz éppen az ábra szerinti lesz.

12.* Rajzoljuk 3-reguláris gráfot minden $n \geq 4$ csúcsszám esetén, amikor létezik. Lehetséges-e, hogy találunk azonos csúcsszámú, de nem izomorf ilyen gráfokat? (Ha találunk, igazoljuk, hogy nem izomorfak.)

Ötletek • ha a csúcsszám páratlan, akkor a fokszámösszeg páratlan lenne. • $n = 4$-re a teljes gráf K_4 jó, általában $n \geq 6$ esetén könnyű $n/2$, $n/2$ csúcsosztályon 3-reguláris gráfot megadni. De jó lehet az is, ha egy szabályos n-szög oldalait és csúcson átmenő tengelyeit húzzuk be.

13. Megadható-e egy 1000-elemű halmaznak 27 részhalmaza úgy, hogy bármelyik részhalmaz pontosan 7 másikat metsz?

Megoldásvázlat. Nem. Rendeljünk csúcsot az egyes részhalmazokhoz és kössünk kettőt össze ha van metszetük. Ez a feéladat szerint egy 27 csúcsú 7-reguláris gráfot adna meg. Ilyen a fokszámtétel következményeként nem létezhet.

14. Egy 10 pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 7. Bizonyítsuk be, hogy bármely három pontnak van közös szomszédja!

Megoldásvázlat. Indirekt úton igazolunk. Vegyünk 3 tetszőleges csúcsot, u, v, w csúcsokat. Ha nem volna igaz az állítás, akkor a többi csúcsból hozzájuk legfeljebb csúcsonként 2, összesen 14 él vezethetne. Köztük legfeljebb 3 él vezet. Így a fokszámösszegükre feírható $d(u) + d(v) + d(w) \leq 14 + 2 \cdot 3 = 20$. De ez lehetetlen, mert $d(u) + d(v) + d(w) \geq 3 \cdot 7$.

Kitekintés

15. Van 25 ló, és egy versenypálya, amin egyszerre legfeljebb 5 ló futhat. Válasszuk ki minél kevesebb futam segítségével a leggyorsabb 3 lovat! A lovak egymáshoz viszonyított teljesítménye versenyek között nem változik, viszont a futamok időeredményeit nem ismerjük, csak az adott futamokon belüli helyezési sorrendeket tudjuk megállapítani.

16. A Bergengóc Open nevű teniszversenyre 79 igazolt teniszjátékos nevezett be. Kieséses kupasorozatba rendezik őket, akinek egy fordulóban nem jut ellenféle, automatikusan továbbjut. Ma játszották a döntőt. Mit írjon a helyi lapnak az újságíró, hány mérkőzés lehetett?

Megoldásvázlat. Minden meccsen egy ember kikap, és többet már nem játszik. Egyedül a győzte nem kap ki a torna során. Tehát a meccsek száma a nem-győztesen számával, $79 - 1$-gyel egyezik meg.