# Véges matematika I. tanári gyakorlat

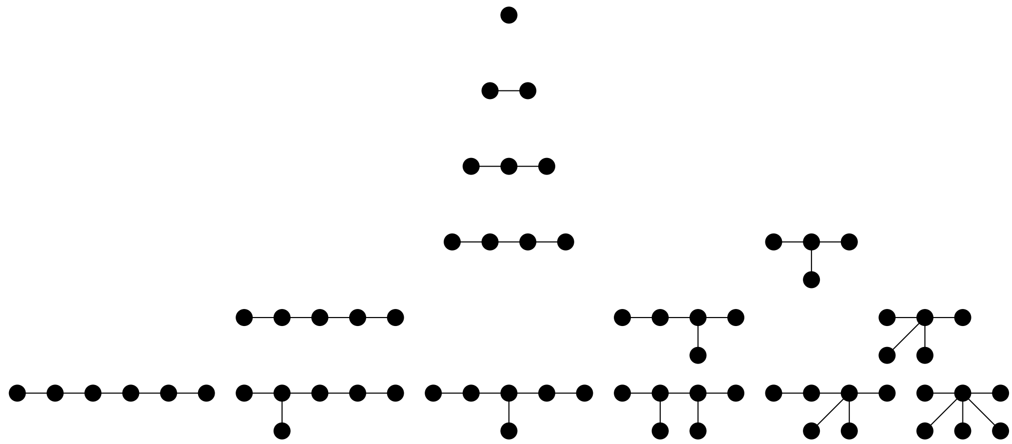
## 7. feladatsor - megoldásvázlatok.

### Alapozás

**EA-ról emlékeztető fogalmak, módszerek:** Euler körséta: minden élen pontosan egyszer áthaladó séta, aminek kezdő és végpontja megegyezik., Hamilton kör és Hamilton út: minden pontot ponton áthaladó kör ill. út. Emlék: Tétel Euler-körséta létezéséről; szükséges feltétel Hamilton-kör létezéséhez, elégséges feltétel Hamilton-.kör létezéséhez (Dirac).

**1.** Rajzoljuk le az összes legfeljebb 6 pontú fát!

**Megoldásvázlat.** 6 ilyen fa van. Valamilyen szisztéma szerint végig kell nézni az eseteket, hogy több tényleg nem lehetséges. Ilyen lehet például a fokszámsorozat, és azon belül a legnagyobb fok.
Egy másik módszeraz előadáson tanult fanövesztési tételre visszaemlékezni, miszerint egy $n > 1$ pontú fából elhagyva az egyik levelét és az abból kiinduló élt egy $n-1$ pontú fát kapunk. Ezt felhasználva rekurzív módon előállíottuk az összes $n$ csúcsú fát, ahogy azt a lenti ábra mutatja, ahol az $n$-edik sorban az $n$ pontú fák vannak, (átlósan) felette pedig azok a fák, amiből egy él hozzáadásával leszármaztatható.



**2.** Igazoljuk, hogy ha egy fában van $k$-adfokú pont, akkor legalább $k$ db elsõfokú pont van benne!

**Megoldásvázlat/1** Legyen a fa csúcsszáma $n$. Fokszámtétel: $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$ igaz, mert $(n-1)$ élű a fa. Válasszuk külön a levelek $L$ halmazát. A többi csúcshoz tartozó fokszám legalább 2, sőt az egyik $k$, vagyis $d_1 + \ldots + d_{n-|L|} \geq k + 2(n - |L| - 1)$. Hozzáadva a többi 1-es fokszámot is, azt kapjuk, hogy $d_1 + \ldots + d_n = k + 2(n - |L| - 1) + |L| = 2n - 2 + k - |L|$. Mivel ez alsó becslés a fokszámösszegre, ezért $k - |L| \leq 0$.

**Megoldásvázlat/2** Legyen $v$ egy $k$ fokú csúcs $u_1, u_2, \ldots, u_k$ szomszédokkal. Töröljük a fából $v$-t és az ebből kiinduló éleket. Ekkor $u_i$ és $u_j$ között $(i \neq j)$ nincs séta, mert különben az eredeti gráfban az egy kört képezne $v$-n keresztül. Tehát mindegyik $u_i$ csúcs külön komponensben van és több komponens nincs is. Ebben a $k$ komponensben továbbra sincs kör, így mindegyik komponens egy fa. Ha $u_i$ izolált csúcs az új gráfban, akkor az az eredeti gráfban egy levél lesz. Különben $u_i$ egy legalább 2 csúcsú fa, így van legalább 2 levele az előadáson elhangzott tétel szerint. Ezek közül az egyik biztosan különbözik $u_i$-től, és ez a csúcs az eredeti gráfnak szintén egy levele lesz. Vagyis mind a $k$ komponensben találtunk egy csúcsot, ami az eredeti gráf egy levele. Ezzel megmutattuk, hogy az eredeti gráfnak van legalább $k$ levele.

**3.** Mutassunk olyan egyszerű gráfot, amely tartalmaz Euler-körsétát, páros sok pontja és páratlan sok éle van!

**Megoldásvázlat.** Egy háromszögből ás egy izolált csúcsból álló 4 csúcsú gráf jó példa. Izolált csúcs nélküli gráf is van: egy négyszög és egy háromszög összeillesztve az egyik csúcsukban. Számos más példa is található.

(Megjegyzés. A tétel miatt minden csúcs foka páros. A feltétel miatt páros darab csúcs van. Így a fokszámösszeg páros darab páros szám összege. Erről könnyű tévesen azt gondolni, hogy 4-gyel osztható, így a fele (vagyis az élszám) pedig 2-vel lenne. A fenti példák erre is rámutatnak, hogy páros darab páros szám összege nem feltétlenül néggyel osztható.)

**4.** Legalább hányszor kell felemelni a ceruzát a $K_{5,6}$ teljes páros gráf lerajzolásakor?

**Megoldásvázlat.** 2 a válasz.

Először megmutatjuk, hogy 2 felemeléssel megoldható a feladat. A gráfban 6 darab páratlan fokú csúcs szerepel (az 5 fokú csúcsok). Ha ezek közül két különböző párt összekötünk egy-egy új éllel, akkor egy egyszerű gráfot kapunk (hiszen eredetileg nem volt él a páratlan fokú csúcsok között). A kapott gráf összefüggő, hiszen már az eredeti gráf is az volt és két csúcs kivételével minden fokszám páros. Így a tétel szerint van az új gráfban Euler-séta. Egy ilyen séta mentél haladva az eredeti gráfot le tudjuk rajzolni a ceruza kétszeri felemelésével. (Amikor egy új élhez érünk a sétában, akkor emeljük fel a ceruzát és az új él másik végében folytatjuk a rajzot.)

Másodjára megmutatjuk, hogy 2 felemelésnél kevesebb nem elég. Tekintsünk egy sikeres lerajzolást. Hívjuk *sétáknak* azokat a (leghosszabb) részeket, amiket a vizsgált lerajzolásban a ceruza felemelése nélkül rajzoltunk. Vegyük észre, hogy mindegyik páratlan fokú csúcs legalább egyszer szerepel egy ilyen séta végén. (Valóban, ha egy sétában szerepel, de nem a végén, akkor ott 2 belőle kiinduló élt rajzoltunk be. Ha nem szerepel egy sétában, akkor 0 belőle kiinduló élt rajzoltunk be. Ha ez minden sétára igaz lenne, akkor összességében biztosan páros sok élt rajzolhatunk be, ami ellentmondás, hiszen az összes (páratlan) élt berajzoltunk a feltételezés szerint.) Persze a séták végén szerepelhetnek páros fokú csúcsok is. De mivel mind a 6 páratlan fokú csúcsnak kell szerepelnie a séták végén (legalább egyszer) és minden sétának legfeljebb 2 vége van, ezért legalább 3 séta szükséges. Ez pedig 2 megszakítást jelent.

**5.** Egy egyszerû $G$ gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az $i$ és $j$ csúcsok között pontosan akkor vezet él $G$-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e $G$ Hamilton-kört, illetve Hamilton-utat?

**Megoldásvázlat.** $G$ tartalmaz Hamilton-utat: például $1 - 2 - 3 - \cdots - 99 - 100$.

$G$ tartalmaz Hamilton-kört: például $1-3-5-7-\cdots-95-97-99-100-98-96-94-\cdots-6-4-2-1$.

Vegyük észre, hogy a Dirac tétel feltétele nem teljesült. De ez még nem zárja ki, hogy létezzen Hamilton kör.

**6.** Egy sakktáblát szeretnénk lóugrásban bejárni úgy, hogy minden mezõre pontosan egyszer lépünk. Lehetséges-e ez, ha a tábla

a) $4 \times 4$-es;

b) $5 \times 5$-ös;

c) $5 \times 5$-ös, és azt is megköveteljük, hogy az utolsó lépésben visszatérhessünk a kiindulási mezõre?

**Megoldásvázlat.** Minden esetben konstruáljuk meg egy gráfot, aminek a csúcsai a sakktábla mezői. Két csúcs össze van kötve egy éllel, ha a hozzájuk tartozó mezők egy lóugrásra vannak egymástól. Vegyük észre, hogy a feladat az így kapott gráf Hamilton-utatjának létezésére kérdez rá.

a) Nem lehetséges. Töröljük a gráf azon $k = 4$ csúcsát, amelyeken x szerepel. A kapott gráfban $6 \geq k + 2$ darab összefüggőségi komponens van. Az azonos számú csúcsok esnek egy komponensbe. Így az előadáson tanultak szerint nincs a gráfban Hamilton-út. (Az érvelés – a tétel bizonyításával együtt – persze átfordítható csak a sakktábla nyelvére. együk fel, hogy van egy bejárásunk. Tekintsük az x mezőket elválasztóknak. Ekkor a bejárásunk legfeljebb 5 részre bomlik szét. Mivel 6 különböző számú mező van, így a skatulyaelv miatt lesz egy olyan rész, ahol két különböző számú mező is szerepel. Ez viszont ellentmondás, mert x érintése nélkül nem léphetünk át egy másik számú mezőre.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 6 | 2 |
| 6 | x | x | 5 |
| 5 | x | x | 6 |
| 4 | 6 | 5 | 3 |

b) Lehetséges. (A próbálkozáshoz segít, ha észrevesszük, hogy a fekete és fehér mezők száma között 1 a különbség. Mivel minden lóugrás két különböző színű mező között történik, így csak abból a színből érdemes kiindulni, amelyikből több van.) Egy ilyen megoldás az ábrán található, ahol a számok azt jelzik, hogy hányadiknak voltunk az adott mezőn.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 9 | 20 | 3 |
| 24 | 19 | 2 | 15 | 10 |
| 13 | 8 | 23 | 4 | 21 |
| 18 | 25 | 6 | 11 | 16 |
| 7 | 12 | 17 | 22 | 5 |

c) Nem lehetséges. Most a feladat a Hamilton-kör létezésére kérdez rá. A fenti ábrán a páros számokhoz tartozó $k = 12$ db csúcsot törölve 13 izolált csúcsot kapunk, így $13 \geq k + 1$ komponense keletkezik a gráfnak. Tétel szerint így ebben nem lehet Hamilton-kör.

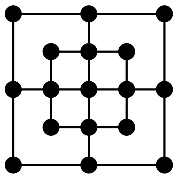
Másik megoldás. Vegyük észre, a gráf páros: a fekete mezők alkotják az egyik osztályt, a fehérek a másikat. Egy páros gráfban pedig minden kör páros hosszú. Így nem lehet benne Hamilton-kör, mert az 25-hosszú kör lenne.

(Egyénileg meggondolandó, a két megoldás kapcsolata, illetve hogy a csúcstörlős kritérium miért általánosabb a színezős érvelésnél.)

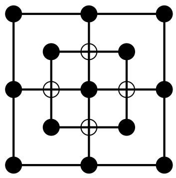
**7.** Van-e olyan 6 pontú, 3-reguláris egyszerû gráf, amelyben nincs Hamilton-kör?

**Megoldásvázlat.** Nincs, hiszen minden $n = 6$ csúcsú 3-reguláris gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$, így Dirac tétele miatt van benne Hamilton-kör.

**8.** Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfban?



**Megoldásvázlat.** Nincs. A gráfból a $k = 4$ fehér csúcsot törölve $6 \geq k + 2$ komponens keletkezik, így nem lehet benne Hamilton-kör a tétel szerint (sőt még Hamilton-út sem).



**Gyakorlás**

**9.*** Igazoljuk, hogy ha egy fában van két 8-adfokú pont és három 3-adfokú, akkor legalább 17 db elsõfokú pont van benne!

**10. (Kulcsfeladat EA-hoz)** Mutassuk meg, hogy páros gráfban minden kör páros hosszúságú! Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban minden kör páros hosszúságú akkor páros!

**Megoldásvázlat.** Tekintsünk egy tetszőleges páros gráfot $A$ és $B$ csúcsosztállyal. Tekintsünk e egy kört a gráfban. Mivel a körben az $A$ és $B$ osztályokhoz tartozó csúcsok felváltva szerepelnek (hiszen nincs él az osztályokon belül), ezért a kör csak páros lépés után tud visszazáródni a kiindulási csúcsba.

A másik irányhoz legyen $G$ gráf, amiben minden kör páros hosszú. Először megoldjuk a feladatot abban az esetben, amikor $G$ összefüggő. Ebben az esetben $G$-nek van feszítőfája a tétel szerint. Az egyik csúcsot tegyük bele az $A$ halmazba. Innentől a feszítőfa mentén lépkedve minden más csúcsot egyértelműen az $A$ vagy a $B$ halmazba tesszük bele aszerint, hogy a halmazokon belül ne legyen éle a feszítőfának. Megmutatjuk, hogy a gráf feszítőfában nem szereplő élei különböző halmazok között megy (vagyis hogy az így képzett halmazok megmutatják, hogy $G$ páros). Indirekten, ha létezne egy $e$ él (például) két $A$-beli csúcs között, akkor tekintsük a feszítőfában az (egyértelmű) utat $e$ két végpontja között. Ezen az úton páros él szerepel, hiszen $A$-ból indul, $A$-ba érkezik, és közben felváltva van $A$ és $B$ között. Ekkor viszont az $e$ éllel együtt ez az út egy páratlan hosszúságú kört alkotna, ami ellentmondás.

**11. (Kulcsfeladat EA-hoz)**
a) Mutassuk meg, hogy nincs olyan egyszerű gráf, aminek fokszámsorozata 1,1,1,1,3,7,8,8,8,8.
b) Mutassuk meg, hogy ha létezik $n$ csúcsú egyszerű gráf $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ fokszámokkal, akkor tetszőleges $k$-ra ($1 \leq k \leq n$ mellett)

$$d_1 + \ldots + d_{n-k} \geq d_{n-k+1} + \ldots + d_n - k(k-1).$$

**Megoldásvázlat.**
a) Vegyük észre, hogy mindegyik 8 fokú csúcs legalább három 1 fokú csúccsal van összekötve. Ez azt jelenti, hogy már két 8-fokú csúcsból kiinduló élek sem húzhatók be, hiszen már ekkor is lenne két 1-fokú csúcs, amibe két él is menne.

b) Az előző gondolatot általánosítjuk. Osszuk a gráf csúcsait két részre. Legyen $A$-ban a $d_1, d_2, \ldots, d_{n-k}$ fokszámokhoz tartozó $n-k$ darab csúcs, és legyen $B$-ben maradék $k$ darab ($d_{n-k+1}, \ldots, d_n$ fokszámokhoz tartozó) csúcs. Tekintsük az $A$ és $B$ közötti éleket. Vegyük észre, hogy egyfelől $A$-ból maximum $d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-k}$ él mehet ki (akkor ha $A$-n belül egyetlen él sincs). Másfelől, egy tetszőleges $d_i$ fokú $B$-beli csúcsból legfeljebb $k-1$ darab él mehet egy másik $B$-belibe, vagyis legalább $d_i - (k-1)$ darab él megy $A$-beli csúcsba. Így összességében a $B$-ből legalább $d_{n-k+1} - (k-1) + d_{n-k+2} - (k-1) + \cdots + d_n - (k-1)$ él megy át $A$-ba. Ha $e(A, B)$-vel jelöljük az $A$ és $B$ között menő élek tényleges számát, akkor fent azt mutattuk meg, hogy

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-k} \geq e(A, B) \geq d_{n-k+1} - (k-1) + d_{n-k+2} - (k-1) + \cdots + d_n - (k-1).$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a két széle pont a bizonyítandó egyenlőtlenség.

(A feladat ad $n$ darab szükséges feltételt egy adott fokszámsorozathoz tartozó gráf létezéséhez. Korábban tanultuk azt a szükséges feltételt, hogy fokszámösszegnek párosnak kell lennie. Megjegyzendő, hogy ezek a feltételen az Erdős–Gallai tétel szerint lényegében elégségesek is. ld. `https://en.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s%E2%80%93Gallai_theorem`.)

**12.** Van-e olyan 10 pontú gráf, amelyben van Euler-körséta, és a csúcsok fokszámainak összege 34?

**Megoldásvázlat.** Van ilyen. A tétel szerint elég arra figyelni, hogy összefüggő legyen a gráf és minden pont foka páros legyen. Ezt például el tudjuk érni, hogy kiindulunk egy 10 hosszú körből. Ennek behúzzuk 7 darab átlóját, hogy a behúzott átlók (egy vagy több) kört alkossanak. (Lehet ez egy darab 7 hosszú kör, vagy akár egy 3 és egy 4 hosszú kör is). Természetesen más jó példák is vannak.

**13.** Az $F$ fának 17 csúcsa van, és bármely csúcsának fokszáma 1 vagy 4. Határozzuk meg, legalább hány élt kell $F$-be behúzni ahhoz, hogy a keletkezõ gráfnak legyen Euler-körsétája!

**Megoldásvázlat.** $F$ összefüggő, tehát arra hatunk, hogy néhány él behúzásával minden fok páros legyen. Ehhez első lépésben meg szeretnénk számolni, hogy mennyi 1 fokú csúcs van.

Legyen $x$ darab 1 fokú csúcs, és $y$ darab 4 fokú. Ekkor

$$x + y = 17.$$

Másfelől a fában $17 - 1 = 16$ él van, így a fokszámösszeg $2 \cdot 16 = 32$, tehát

$$x \cdot 1 + y \cdot 4 = 32.$$

A két egyenletből álló rendszer megoldása $x = 12$, $y = 5$, vagyis 12 darab páratlan fokú csúcs van $F$-ben. (Azért érdemes egyenletekre áttérni, mert több ilyen fa is létezik, viszont ezzel a módszerrel nem kellett eseteket szétválasztani, és meg mutattuk, hogy az *összes* ilyen fának 12 levele van.)

Vegyük észre, hogy két levél nem lehet összekötve eredetileg, mert különben nem lenne összefüggő a gráf (és több mint 2 csúcs van). Ez azt jelenti, hogy a 12 levelet tetszőlegesen 6 párba tudjuk állítani, és a párok között egy-egy élt behúzni, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon. Most már minden fok páros (12 darab 2 fokú és 5 darab 4 fokú csúcs van), így a tétel szerint van benne Euler-körséta.

Kevesebb él behúzása nem elég, hiszen minden új él legfeljebb 2-vel csökkenti a páratlan fokú csúcsok számát.

**14.** Igazoljuk hogy tetszõleges $G$ Euler-gráf élei megirányíthatóak úgy, hogy bármely csúcs ki- és befoka legfeljebb eggyel térjen el egymástól.
Igazoljuk, hogy ez nemcsak Euler-gráfokra, hanem tetszőleges gráfra is igaz!

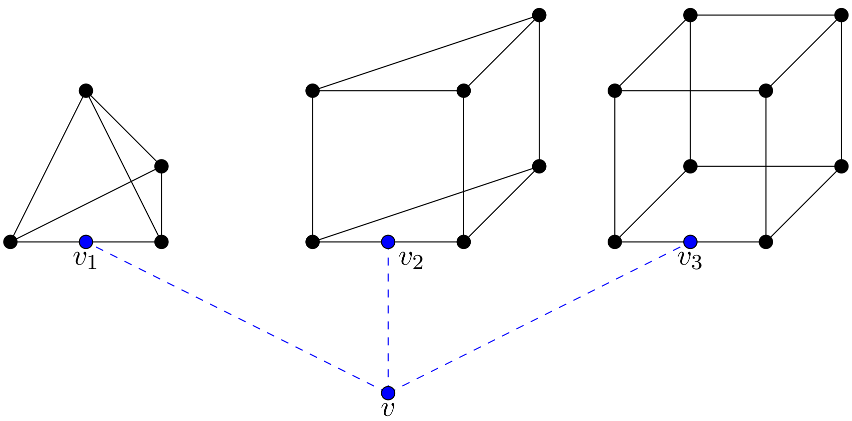
**Megoldásvázlat.** Tekintsük a $G$ gráf egy Euler-sétáját (ami létezik a feltétel miatt). Járjuk végig ezt a sétát, és minden érintett élt irányítjuk meg a haladási irány szerint. Mivel az Euler-séta a gráf összes élét tartalmazza, ezért minden élt elláttunk egy irányítással. A kezdő és vég csúcs kivételével minden csúcsba pontosan annyiszor léptünk be a séta során, mint ki, vagyis ezeknél a csúcsoknál a ki- és befokok megegyeznek. Ha a kezdő és a vég csúcsok megegyeznek, akkor az előbbi állítás erre a csúcsra is érvényes. Különben pedig a kezdő csúcs kifoka 1-gyel nagyobb a befokánál, hiszen onnan indultunk, de nem ott végeztünk. Hasonlóan az utolsó csúcs befoka 1-gyel nagyobb a kifokánál. Így ez az irányítás megfelel a feladat követelményeinek.

Legyen most $G$ egy tetszőleges gráf. Adjunk hozzá $G$-hez egy új csúcsot, és kössük ezt össze az összes olyan csúccsal, ami az eredeti gráfban páratlan fokú volt. Most minden csúcs foka páros (hiszen az eredeti gráf minden páratlan foka 1-gyel megnövekedett, és új csúcs foka pedig az eredeti gráf páratlan fokú csúcsainak száma, vagyis páros lesz). Az új gráf minden összefüggőségi komponensében van egy Euler-körséta a tétel szerint. Az első részt alkalmazva meg tudjuk irányítani az éleket minden összefüggőségi komponensben, hogy ott minden csúcsra a ki- és befok megegyezzen. Így persze ez igaz az új gráf minden csúcsára is. Most töröljük ki az új éleket (és az új csúcsot). Mivel minden eredeti csúcsból legfeljebb 1 éé indul ki, ezért a törtés után a ki- és befok különbsége legfeljebb 1-gyel tud változni. Így ez az irányítás jó lesz.

**15.*** a) Egy 1000 csúcsú gráfban minden pont foka legalább 750. Bizonyítsuk be, hogy "sok" éldiszjunkt Hamilton-kör van benne! Mennyit tudunk igazolni? b) Mennyi Hamilton-kör van egy $K_{n,n}$ gráfban?

**16.** Mutassunk példát olyan 3-reguláris egyszerű összefüggõ gráfra, amelyben nincs Hamilton-út!

**Megoldásvázlat.** Legyen $G_1$, $G_2$ és $G_3$ három tetszőleges 3-reguláris összefüggő gráf (például tetraéder, prizma, kocka stb). $G_i$ egy tetszőleges élét válasszuk ki, és a közepére adjunk hozzá egy új, $v_i$ nevű (2 fokú csúcsot). Vegyünk fel egy új, $v$, csúcsot, és ezt kössük össze $v_1, v_2, v_3$ csúcsokkal. Ekkor a kapott gráf összefüggő és minden csúcs foka 3. Indirekten tegyük fel, hogy a gráfban van Hamilton út. Ekkor ez az út tartalmazza szükségszerűen mindhárom $v$-ből kiinduló élt, különben nem tudna eljutni az út az eredeti $G_i$ gráf csúcsaiba. Viszont egy Hamilton-út minden csúcshoz legfeljebb 2 élt használhat, ami ellentmondás.




**17.** Igaz-e, hogy ha egy egyszerű gráfnak $2n+1$ pontja van, és minden pont foka legalább $n$, akkor a gráfban van Hamilton-út?

**Megoldásvázlat.** Igaz. Ezt úgy látjuk be, hogy módosítjuk az eredeti gráfot, majd alkalmazzuk a Dirac-tételt, végül pedig ebből következtetünk az erredeti gráf tulajdonságára.

Adjuk hozzá a gráfhoz egy új $v$ csúcsot és ezt kössük összes régi csúccsal. Az új gráfnak így $2n+2$ csúcsa van. A régi csúcsok foka $n+1$ lett, az új csúcs foka pedig $2n+1$. Vagyis minden csúcs foka legalább az (új) csúcsszám fele, így az új gráfban Dirac tétele miatt van Hamilton-kör. Ha ebből a Hamilton-körből kitöröljük a $v$ csúcsot (és a két ide kapcsolódó élt), akkor az eredeti gráfnak egy Hamilton-útját kapjuk meg (hiszen ezt minden eredeti csúcsot tartalmaz és köztük csak az eredeti éleket használtuk a konstrukció miatt).

**18.*** A boltban vásároltunk 100 piros, 150 kék és 200 darab zöld színû gyöngyöt. Bizonyítsuk be, hogy lehet olyan nyakláncot készíteni az összes gyöngy felhasználásával, amelyben azonos színû gyöngyök nem kerülnek egymás mellé! Mi köze ennek a gráfokhoz? Általánosan a pontos feltétele annak a gyöngyszámok 3 paramétere szerint fel lehessen õket így fûzni?

**19.*** Egy teljes gráf minden élét tetszõleges irányban megirányítottuk. Mutassuk meg, hogy a kapott gráfban mindig van irányított Hamilton-út!

### Kitekintő

**20.*** Bejárható-e a $8 \times 8$-as sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezõn pontosan egyszer járunk, és a végén visszaérünk a kiindulópontba?

**21.*** Egy társaságban mindenki 4 másik embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetõk néhány kõrasztal köré úgy, hogy mindenki ismerje mindkét szomszédját!