Véges matematika I. tanári gyakorlat

1. alkalom - Megoldásvázlatok

1. a) Hányféleképpen rendezheti sorba a mozdony mögé a $421, 422, 423, 424, 425, 426$-os kocsikat a műszakvezető?
b) Hányféle lehet az első két kocsi sorrendje?
c) A szerelvény elején és végén bicikliszállítás is engedélyezett. Hányféle kocsipárba kerülhetnek biciklik?
d) A szerelvényben a hat kocsi közül az elsőben, harmadikban és ötödikben büfét is kialakítának. Hányféleképpen választhatnak ki hármat, ahol büfé lesz?

Megoldásvázlat: a) $6!$. b) $6 \cdot 5$ (ismétlés nélküli permutáció, illetve ismétlés nélküli variáció, sorban döntünk arról hogy a sorrendben ki következik).c) $\binom{6}{2}$ kiválasztjuk azt a két kocsit a 6-ból, ahol a bicikli lesz. (2-vel akkor kellene szorozni, ha azt is eldöntjük, melyik megy előre) d) $\binom{6}{3}$

2. A műszakvezető 5 éves kisfia rajong a vonatokért, és legó-vonatokat épít. 5 piros, 2 kék, 3 sárga kocsija van.
a) Hányféle különböző 2 hosszúságú szerelvényt építhet belőlük?
b) Hányféle különböző 3 hosszúságú szerelvényt építhet belőlük?
c) Hányféle különböző 10 hosszúságú szerelvényt építhet belőlük?
d) Hányféle 10 hosszúságú szerelvényt építhet belőlük, ha nem akar piros kocsikat egymás mellé tenni?

Megoldásvázlat: a) $3^2 = 9$, b) $3^3 - 1 = 26$. Az összes lehetőségből (minden helyre bármilyen színű jöhet) kidobjuk azt az egyet ami nem jó, a kék-kék-kék, mert nincs ennyi kék kocsi) c) $\frac{10!}{5!2!3!}$, ha először megkülönböztetjük az összes kocsit, aztán megnézzük hogy így hányszor számoltuk meg ugyanazt a színsorrendet. Ugyanazt a színsorrendet annyiszor számoljuk, ahányféleképpen a sárga, kék, piros kocsikat saját maguk között sora tudjuk rendezni. Másképp: $\binom{10}{5}\binom{5}{2}\binom{3}{3}$, ha a 10 hely közül sorba kiválasztjuk a piros, majd a maradékból a kék, majd a maradékból a sárgák helyét.

3. A Budapest Déli pályaudvarról műszaki meghibásodás miatt a GySEV soproni és szombathelyi, a MÁV veszprémi és balatoni járatát új indítási időre kell kiírni. Hányféleképpen teheti meg ezt az irányítóközpont, ha
a) minden vonat tetszőleges indítási időre beosztható 15:00, 15:10, 15:20 és 15:30 közül?
b) a fenti időpontokban kell indulniuk, de minden időpontban csak egy vonat indulhat?
c) a fenti időpontok valamelyikében kell indulnia minden vonatnak, de a GySEV járatai nem indulhatnak azonos időpontban?

Megoldásvázlat: a) 4^4 b) $4!$. c) $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$, ha először a GySEV két járatának az időpontját döntjük el, utána a többit. Másképp, az összesből a rosszat kivonva: $4^4 - 4^3$, ahol az a rossz, ha az második GySEV járat automatikusan akkorra kerül mint az első.

4. Budapestről Szobra utazunk. Az utazás közben három pogácsát szeretnénk megenni, mindháromnak egy köztes állomáson látnánk neki. A köztes állomások: Rákospalota-Újpest, Vác, Verőce, Kismaros, Nagymaros-Visegrád, Zebegény. Hányféleképpen választhatjuk ki az evések időpontjait?

Megoldásvázlat: $\binom{6}{3}$: 6 állomásból kell 3-at kiválasztani, különbözőket.

5.* A vonatjegyünkre egy 10 hosszú számjegysort nyomtatnak. Hányféle sorszáma lehet a jegyünknek, ha
a) a számjegyek között nem szerepel a 0?
b) a számjegyek között előfordul a 0?
c) a számjegyek között csak páratlan jegyek szerepelnek?
d) a számjegyek között 3 db 3-as, 5 db 5-ös, 2 db 1-es van?

6. Egy dobozban 10 piros, 20 sárga és 50 zöld golyó található. Becsukott szemmel legalább hány golyót kell kihúznunk ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között
a) sárga golyó?

b) három különbözõ színû golyó?
c) három azonos színû golyó?
d) tizenöt azonos színû golyó?
e) két egymás után kihúzott zöld golyó?

Megoldásvázlat: a) 50+10+1 b) 50+20+1 c) $3 \cdot 2 + 1$ (skatulya elv!) d) $10 + 14 + 14 + 1$ e) 62. 61 nem elég, mert ZXZXZX...ZXZ sorrendben, ahol felváltva jön Z a zöld, X bármi nem zöld, elhelyezhető ZZ egymást követő pár nélkül 61 golyó. 62 elég, mert ez megad 31 diszjunkt szomszédos párt, ebből csak 20+10-ben lehet S vagy P golyó.

7. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 13+1 soros totószelvényt 1, X, 2 kimenetelek karikázásával (minden mérkőzésre ezek közül egyet megjelölve) úgy, hogy (a) legfeljebb 1 db X legyen? (b) legalább 1 db X legyen?

Megoldásvázlat: a) két esetre bontáés: 0 db ill 1 db X. Ennek alapján a válasz: $2^{14} + \binom{14}{1} \cdot 2^{13}$ a válasz, hiszen a második esetben ki kell választani az X helyét, és a többi helyen 2 lehetőség van (1,2) ami nem az X.
b) Összesből a rosszat dobjuk ki: $3^{14} - 2^{14}$

8. Hány 6 hosszúságú sorozat van, ahol minden elem vagy 0 vagy 1?
Hány 7 hosszúságú sorozat van, ahol minden elem vagy 0 vagy 1 vagy 2?
Hány részhalmaza van egy n-elemű halmaznak?

Megoldásvázlat: a) 2^6, b) 3^7, c) Az összes részhalmazok száma 2^n (minden elemrõl egymástól függetlenül dönthetjük el, hogy bevesszük-e egy részhalmazba, vagy sem), vagyis ez megfeleltethető annak a kérdésnek, hogy hány n hosszúságú sorozat van, ahol minden elem vagy 0 vagy 1?

9. Hány olyan 6 hosszúságú sorozat van, ahol minden elem vagy 0 vagy 1, és az 1-esek száma páros?

Megoldásvázlat: 2^{n-1} (az elsõ $n-1$ elemrõl szabadon döntjük el, hogy bevesszük-e, az utolsónál pedig kötött a döntésünk, mivel páros számú elemet kell kiválasztanunk).

10.* Hány olyan 8 betűbõl álló (nem feltétlenül értelmes) szó van, amelyben 4 különbözõ magánhangzó található? (A mássalhangzók között lehetnek egyformák is. Az angol abc-t használjuk, amelyben 5 magánhangzó és 21 mássalhangzó van.)

Megoldásvázlat: $\binom{8}{4} \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 21^6$ (3 döntést hozunk egymás után. az elsõ szám a magánhangzók helyének, a második a magánhangzók kiválasztását, a harmadik a mássalhangzók kiválasztásai számát mutatja).

11. Hányféleképpen tehetünk fel egy sakktáblára 6 egyforma bástyát úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?
Hányféleképpen tehetünk fel egy sakktáblára 8 egyforma bástyát úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

Megoldásvázlat: Többszörös leszámolással: $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9/6!$, ahol egyenként tesszük le a bástyákat, csak arra figyelve hogy foglalt sorba vagy oszlopba már ne rakjunk. A végén osztunk 6!-sal, mert minden bástyaállást annyiféleképpen előidézhetünk, ahányféleképp a 6 helyet sorba tudjuk rendezni.
Másképp: kiválasztjuk a a 6 darab használandó sort és oszlopot: $\binom{8}{6}^2$, majd ezt megszorozzuk azzal, hogy ezen sorokban pontosan melyik oszlopba is kerül a bástya: vagyis szorzunk 6!-ral.
b) hasonlóképpen: 8!