Véges matematika I. tanári gyakorlat

3. alkalom - 2024. március 1.

Gyakorlatvezetõ: **Nagy Zoltán Lóránt (nagyzoli@cs.elte.hu), www.cs.elte.hu/~nagyzoli**

1. Mennyi ez:
a) $1 + 30 \cdot 3 + \binom{30}{2} \cdot 3^2 + \ldots \binom{30}{29} \cdot 3^{29} + \binom{30}{30} \cdot 3^{30}$
b) $2 + 30 \cdot 4 + \binom{30}{2} \cdot 2^3 + \ldots \binom{30}{29} \cdot 2^{30} + \binom{30}{30} \cdot 2^{31}$
c) $1 - 10 \cdot 4 + \binom{10}{2} \cdot 4^2 - \ldots + \ldots - \binom{10}{9} \cdot 4^9 + \binom{10}{10} \cdot 4^{10}$

2. Melyik nagyobb? $\binom{19}{1} + \binom{19}{2} + \binom{19}{3} + \ldots + \binom{19}{18} + \binom{19}{19}$ vagy $\binom{20}{1} + \binom{20}{3} + \binom{20}{5} + \ldots + \binom{20}{17} + \binom{20}{19}$?

3. Igazoljuk, hogy a Pascal-háromszögben ha váltakozó előjellel összeadjuk egy tetszőlegesen választott sorban az elemeket (a legelső egyelemű sor kivételével), akkor 0-t kapunk!

4. Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \tag{1}$$

és

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m} \tag{2}$$

5. Jelölje F_n az n. Fibonacci számot, ahol $F_1 = F_2 = 1$. Lássuk be hogy $n \geq 1$-re

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

6.* Lássuk be, hogy a Fibonacci számokra teljesül, hogy $F_{n+1} = F_{n-1}F_3 + F_{n-2}F_2$.
Lássuk be, hogy $F_{n+1} = F_{n-11}F_{13} + F_{n-12}F_{12}$.

7. 18 egyforma alakú, még színtelen karácsonyfadíszt szeretnénk megfesteni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha ötféle festékünk van?

8. a) Hányféleképpen oszthatunk ki 10 diák között 15 papírlapot, ha mindenki legalább egyet kap?,
b) Mi a helyzet, ha nem papírlapokat, hanem különböző házifeladatokat jelölünk ki, szintén 15-öt, úgy hogy mindenki kapjon legalább egyet?

9. Három négytagú család szeretne egy kerek asztal köré telepedni úgy, hogy egy család tagjai egymás mellett üljenek. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

10. Hány olyan húszjegyű szám van, amelyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel?

11.* Egy trafikban tízféle nyalóka és ötféle cukorka kapható.
a) Róka Rudolf 6 különböző nyalókát szeretne vásárolni, és talán még megkóstol néhányféle cukorkát (a kóstoláshoz fajtánként egy-egy szem elegendő). Hányféleképpen alakulhat a vásárlás? (Az számít, hogy végül miket vásárolt, a sorrend pl. nem.)
b) Róka Rudolf később mindegyik fajta cukorkából két-két darabot vásárolt, és úgy döntött, hogy szétosztja őket öt barátja között. Hányféleképpen adhatta oda a cukorkákat, ha senkinek nem adott két egyformát? (Más megkötés nincs.)

12. Egy édesipari vállalat kínálatában nyolcféle különböző bonbon található, melyek közül négy szögletes, négy pedig kerek alakú.
a) A vállalat ajándékcsomagjainak mindegyikébe 30 szem bonbont válogatnak a cég nyolcféle édességéből úgy, hogy minden fajtából legalább kettő kerüljön a zacskóba. Hányféle csomagot állíthatnak össze?
b) A cég termékmintáját egy kör alakú dobozban szervírozza, melyben körben helyezkedik el a nyolcféle desszertből egy-egy darab (középen nincs). Hányféleképpen rendezhetik el a bonbonokat a dobozban, ha szögletes és kerek bonbonok felváltva sorakoznak, és a forgatással egymásba vihető elrendezéseket azonosnak tekintjük?

13. Hány olyan 10-betűs szó van, melyben 3 a, 5 b és 2 c szerepel, de a két c nincsen egymás mellett?

14. A hatjegyű számokat csoportosítom aszerint, hogy melyik számjegyből mennyi szerepel bennük. (Pl. az 117777 és az 771177 ugyanabban a csoportban vannak, de pl. a 717171 másikban van.)
a) Hány csoport van összesen?
b) Mennyi számból áll az a csoport, amelyben a 757733 szám szerepel? És amiben a 101200?
c) Hány olyan csoport van, melyekben pontosan négyféle számjegyből álló számok vannak?